

N° D'ORDRE :

2439

Série A

N° 1573

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean LEHUÉROU KERISEL

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU FROTTEMENT DES
MILIEUX PULVÉRULENTS ET APPLICATION A
L'ÉTUDE DES FONDATIONS.

2^e THÈSE. — L'HYSTÉRÉSIS DANS LES PHÉNOMÈNES MÉCANIQUES.

Soutenues le 3 juillet 1935, devant la Commission d'Examen.

MM. FABRY, *Président.*

VILLAT {
VILLEY { *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1935

N° D'ORDRE :

2439

Série A

N° 1373

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean LEHUÉROU KERISEL

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU FROTTEMENT DES
MILIEUX PULVÉRULENTS ET APPLICATION A
L'ÉTUDE DES FONDATIONS.

2^e THÈSE. — L'HYSTÉRÉSIS DANS LES PHÉNOMÈNES MÉCANIQUES.

Soutenues le 3 juillet 1935, devant la Commission d'Examen.

MM. FABRY, *Président.*

VILLAT }
VILLEY } *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1935

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

<i>Professeurs honoraire</i>	H. LE CHATELIER.	LÉON BRILLOUIN.	AUGER.
	H. LEBESGUE.	GOURSAT.	BLAISE.
	A. FERNBACH.	WALLERANT.	DANGEARD.
	A. LEDUC.	GUILLÉT.	JANET.
	Émile PICARD.	PECHARD.	LESPIEAU.
	Rémy PERRIER.	FREUNDLER.	MARCHIS.
			MOUTON.

PROFESSEURS

G. BERTRAND.....	T	Chimie biologique.	A. DUFOUR.....	T	Physique.
M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	L. DUNOYER.....		Optique appliquée.
G. URBAIN.....	T	Chimie générale.	A. GUILLIERMOND.	T	Botanique.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	M. JAVILLIER.....		Chimie biologique.
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.	L. JOLEAUD.....		Paléontologie.
H. ABRAHAM.....	T	Physique.	ROBERT-LÉVY.....		Zoologie.
E. CARTAN.....	T	Géométrie supérieure.	F. PICARD.....		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
M. MOLLIARD.....	T	Physiologie végétale.	Henri VILLAT....	T	Mécanique des fluides et applications.
L. LAPICQUE.....	T	Physiologie générale.	Ch. JACOB.....	T	Géologie.
E. VESSIOT.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	P. PASCAL.....	T	Chimie minérale.
A. COTTON.....	T	Recherches physiques.	M. FRÉCHET.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
J. DRACH.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	E. ESCLANGON...	T	Astronomie.
Charles FABRY...	T	Enseignement de Physique.	M ^{me} RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
Charles PÉREZ...	T	Zoologie.	H. BÉGHIN.....	T	Mécanique physique et expérimentale.
Léon BERTRAND..	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	Foch.....		Mécanique expérimentale des fluides.
P. PORTIER.....	T	Physiologie comparée.	PAUTHENIER.....		Physique.
E. RABAUD.....	T	Biologie expérimentale.	De BROGLIE.....	T	Théories physiques.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.	CHRÉTIEN.....		Optique appliquée.
Paul MONTEL....	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.	P. JOB.....		Chimie générale.
P. WINTREBERT..	T	Anatomie et histologie comparées.	LABROUSTE.....		Physique du Globe.
L. BLARINGHEM..	T	Botanique.	PRENANT.....		Zoologie.
O. DUBOSCQ.....	T	Biologie maritime.	VILLEY.....		Mécanique physique et expérimentale.
G. JULIA.....	T	Application de l'analyse à la géométrie.	BOHN.....		Biologie animale.
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.	COMBES.....		Biologie végétale.
A. MICHEL-LÉVY..		Pétrographie.	GARNIER.....		Calcul différentiel.
H. BÉNARD.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	PÈRES.....		Mécanique des fluides.
A. DENJOY.....	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	HACKSPILL.....		Chimie.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.	LAUGIER.....		Physiologie générale.
Eugène BLOCH...	T	Physique théorique et physique céleste.	TOUSSAINT.....		Technique Aéronautique.
G. BRUHAT.....		Physique.	M. CURIE.....		Physique (P. C. N.).
E. DARMOIS.....		Physique.	G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.
A. DEBIERNE....	T	Radioactivité.	CHAZY.....	T	Mécanique rationnelle.
			GAULT.....		Chimie.
			CROZE.....		Physique.
			DUPONT.....	T	Théories chimiques.
			LANQUINE.....		Géologie.
			VALIRON.....		Mathématiques générales.

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.



A

M. ALBERT CAQUOT

MON MAITRE DANS LA VOIE SCIENTIFIQUE

En hommage très respectueux.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

PREMIÈRE THÈSE.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DU

FROTTEMENT DES MILIEUX PULVÉRULENTS

ET

APPLICATION A L'ÉTUDE DES FONDATIONS

INTRODUCTION.

Dans son célèbre traité de la *Poussée des Terres* publié en 1903, Jean Résal ⁽¹⁾ discutant les valeurs à attribuer à l'angle de frottement des milieux pulvérulents, s'exprimait en ces termes : « on ne possède que des notions vagues et incertaines, dont la source est mal connue, et que les auteurs se repassent de confiance de l'un à l'autre sans les vérifier. On est donc mal documenté sur cette question et l'on conçoit qu'il ne paraisse pas bien utile de procéder à un calcul minutieux de la poussée à 5 ou 10 pour 100 près, quand cette recherche est basée sur une donnée incertaine, dont la précision ne peut être garantie à 15 ou 20 pour 100, même pour les terres dont la nature est parfaitement définie, comme le sable fin et sec, par exemple ».

Notre intention a été ici d'entrer dans la voie tracée par

(1) Bérangier, éditeur, p. 121.

Jean Résal il y a trente ans et d'apporter une modeste contribution à l'étude des milieux pulvérulents.

Recherche très complexe mais combien féconde par ses applications variées à l'art de l'ingénieur : glissement de terrains, souterrains, fondations, etc., questions qui pour la plupart relèvent encore de la connaissance empirique.

Sans doute dans le domaine des sciences appliquées, la précision de formule exactes n'est-elle pas absolument indispensable eu égard aux hypothèses simplificatrices de départ et à l'approximation désirée. Il est incontestable cependant qu'une étude scientifique fera progresser très utilement la connaissance des milieux pulvérulents.

Aussi bien est-il assez curieux de noter qu'à l'heure actuelle encore, on introduit assez fréquemment dans les calculs de poussée des terres, les caractéristiques physiques d'un milieu pulvérulent moyen. Cette manière de faire donne, en général des résultats satisfaisants avec des dimensions surabondantes mais elle conduit parfois à des déboires malgré l'adoption de coefficients très élevés de sécurité par rapport aux résultats du calcul.

Sécurité et économie, tels sont donc les avantages qui semblent devoir résulter d'une étude scientifique des milieux terreux.

Laissant de côté le cas très complexe des milieux cohérents, nous nous sommes borné aux milieux pulvérulents.

Nous avons divisé notre étude en deux parties :

Première partie : Étude expérimentale du frottement des milieux pulvérulents.

Deuxième partie : Application aux fondations — Rappel de la démonstration d'une nouvelle formule de résistance des fondations et vérification de celle-ci en partant des données de la première partie.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DU FROTTEMENT DANS LES MILIEUX PULVÉRULENTS.

CHAPITRE I.

RAPPELS ET DÉFINITIONS. — FROTTEMENT PHYSIQUE.

Massifs pulvérulents. — Considérons un milieu pulvérulent en équilibre. Cet équilibre résulte du frottement mutuel des grains dont est constitué le massif. Coulomb a admis qu'un tel milieu peut se comporter comme un milieu continu dans lequel toutes les contraintes obéiraient uniquement à la loi du frottement. Selon

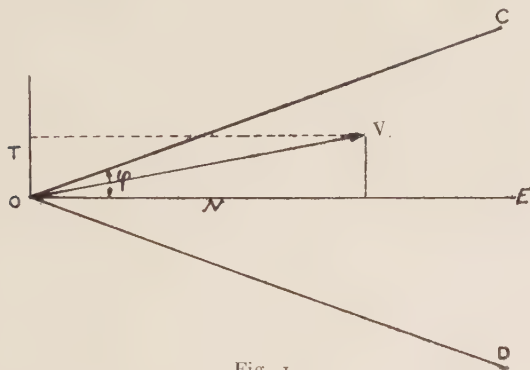


Fig. 1.

cette hypothèse, si nous désignons par N la contrainte normale relative à un élément de surface de ce milieu et par T la contrainte tangentielle, il existe entre elles l'inéquation $T \leq N \tan \varphi$, l'équilibre limite étant caractérisé par l'équation $T = N \tan \varphi$; φ est l'angle de frottement apparent du milieu considéré.

Par suite, si nous désignons par V_1 (*fig 1*) la contrainte totale ayant pour composantes N et T , pour qu'il y ait équilibre, il faut

et il suffit que ce vecteur reste à l'intérieur de l'angle COD, dont les côtés font l'angle φ avec la normale CE à l'élément de surface. Il y aura équilibre limite si l'extrémité du vecteur représentatif de la contrainte se trouve sur les droites OC ou OD.

Par analogie avec la théorie générale des courbes intrinsèques pour les corps continus, on dit que COD représente la courbe intrinsèque du massif pulvérulent.

Cette courbe définit, d'une façon générale, le domaine à l'intérieur duquel doit se trouver une contrainte telle que OV , pour que le milieu ne subisse de déformations de glissement. On démontre par ailleurs que cette courbe est l'enveloppe des cercles de Mohr des systèmes élastiques réalisés au moment où commencent les déformations permanentes (1).

Massifs cohérents. — La figure 2 représente la courbe intrinsèque des massifs cohérents.

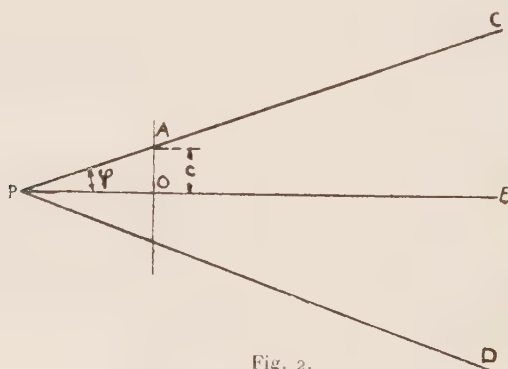


Fig. 2.

L'équation caractéristique de l'équilibre limite dans ces milieux s'écrit

$$T = N \tan \varphi + C.$$

C s'appelle la cohérence et est représentée par OA. Elle est égale au cisaillement limite sous une pression nulle. Ainsi la composante tangentielle T est équilibrée non seulement par la composante de frottement $N \tan \varphi$ mais en plus par une certaine contrainte C appelée cohésion.

(1) Voir la deuxième partie de cette thèse Chapitre VI, p. 63.

De la forme des deux courbes intrinsèques précédentes, qui se déduisent l'une de l'autre par translation, on déduit qu'un milieu cohérent est en équilibre si l'on peut lui faire correspondre un milieu pulvérulent en équilibre lui-même, occupant le même espace, admettant le même frottement apparent interne et soumis sur les parois qui le limitent au même effort que le milieu cohérent augmenté de la pression hydrostatique $H = C \cotg \varphi$. Cette pression est représentée par le vecteur $\overrightarrow{PO}$ sur la figure 2.

C'est cette propriété fort simple qui constitue le théorème fondamental *des états correspondants* ⁽¹⁾ qui permet de ramener le cas des milieux cohérents à celui des milieux pulvérulents par des conditions aux limites convenablement choisies.

Frottement physique. — Considérons deux solides (tels que les envisage la mécanique rationnelle) constitués par un milieu de même nature que les grains du milieu pulvérulent envisagé ci-dessus. Si nous étudions le contact de ces deux solides nous pourrions écrire, entre l'effort normal de contact N et l'effort de cisaillement T une relation analogue à l'équation caractéristique des milieux pulvérulents

$$N \leq T \tan \psi.$$

ψ est ce que l'on appelle l'angle de frottement physique.

Relations entre le frottement apparent et le frottement physique.

— Existe-t-il une relation entre φ et ψ ?

Le processus du frottement apparent apparaît, comme assez complexe puisqu'il résulte du contact de grains enchevêtrés. S'il existe une relation, celle-ci ne peut donc que résulter des lois de la statistique mathématique.

Envisageant le cas schématique des milieux pulvérulents isotropes à frottement pur, dans lesquels la probabilité des plans de contact des facettes est la même dans toutes les directions, M. Caquot a montré qu'il existait la relation

$$\tan \varphi = \frac{\pi}{2} \tan \psi,$$

⁽¹⁾ CAQUOT, *Équilibre des massifs à frottement interne* (Gauthier-Villars, 1934, p. 7).

Valeurs du frottement physique. — Le général Morin a effectué de nombreuses mesures de frottement physique en mesurant la pente correspondant à l'équilibre limite sur un plan incliné d'un échantillon du corps à étudier reposant par une face plane.

Il a observé notamment que lorsque deux corps ont été au contact quelque temps (une vanne avec ses coulisses par exemple), le frottement au début du glissement est supérieur à celui que l'on enregistre durant le mouvement uniforme.

Voici quelques valeurs de l'angle ψ indiquées dans le traité du général Morin pour des pierres calcaires.

*a. — Frottement des surfaces planes
lorsqu'elles ont été quelque temps en contact (pression non indiquée).*

Pierre calcaire oolithique sur calcaire oolithique sans enduit...	0,74
Pierre calcaire dure sur calcaire oolithique.....	0,75
Pierre calcaire dure sur pierre calcaire dure.....	0,70

*b. — Frottement des surfaces planes
en mouvement les unes sur les autres.*

Pierre calcaire oolithique sur calcaire oolithique sans enduit...	0,64
Pierre calcaire dure sur calcaire oolithique.....	0,67
Pierre calcaire dure sur pierre calcaire dure.....	0,38

On remarquera que les frottements au repos sont très voisins de 0,70 qui correspond à l'angle $\psi = 35^\circ$.

Voici une méthode qui nous a permis d'atteindre l'angle de frottement physique ψ avec une approximation assez satisfaisante et qui présente quelque analogie avec les mesures de frottement apparent que nous décrirons.

Les grains du milieu pulvérulent à étudier, de même grosseur,

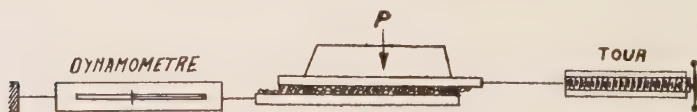


Fig. 3.

sont collés ⁽¹⁾ sur deux supports (fig. 3 et 4) de telle sorte

⁽¹⁾ Nous nous sommes servi de seccotine épaisse.

que les surfaces des grains soient tangentes à un même plan horizontal.

Appliqués l'un contre l'autre par une charge connue P, l'un d'eux est relié à un dynamomètre tandis que l'autre est rendu solidaire d'une vis micrométrique au $1/10^e$ de millimètre dont la rotation permet de lui imprimer un mouvement de translation très lent par rapport au premier.

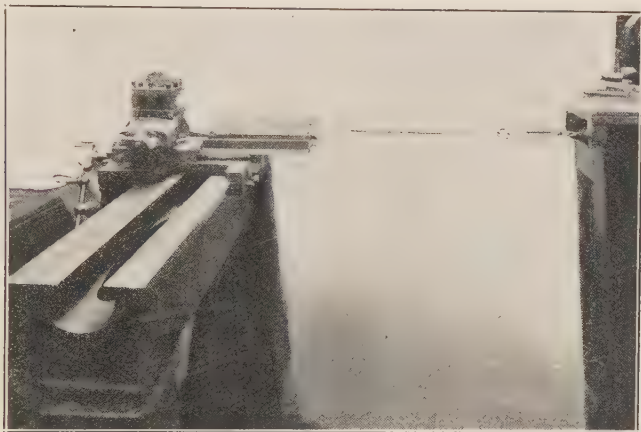


Fig. 4.

Les contraintes T et N étant relatives aux mêmes surfaces d'application des grains, le coefficient de frottement est donc le rapport moyen de la charge d'application à l'indication du dynamomètre. Ce rapport présente des valeurs instantanées variables pendant la translation, les grains du support mobile ayant, par rapport à ceux du support fixe avec lesquels ils sont en contact, un mouvement relatif horizontal, *en moyenne seulement*, le nombre de grains étant limité.

Dans cette expérience il y a frottement de glissement d'un grain mobile par rapport à un grain fixe, au contraire, dans les mesures de frottement apparent il y a frottement entre grains animés de mouvements relatifs de glissement et de rotation.

Nous avons appliqué cette méthode au sable de Loire calibré à 4^{mm} . Voici les résultats (*fig. 5*)

Ces graphiques font apparaître un coefficient de frottement

physique $\tan \psi = 0,48$ soit $\psi = 26^\circ$ environ ⁽¹⁾. Notre étude sur

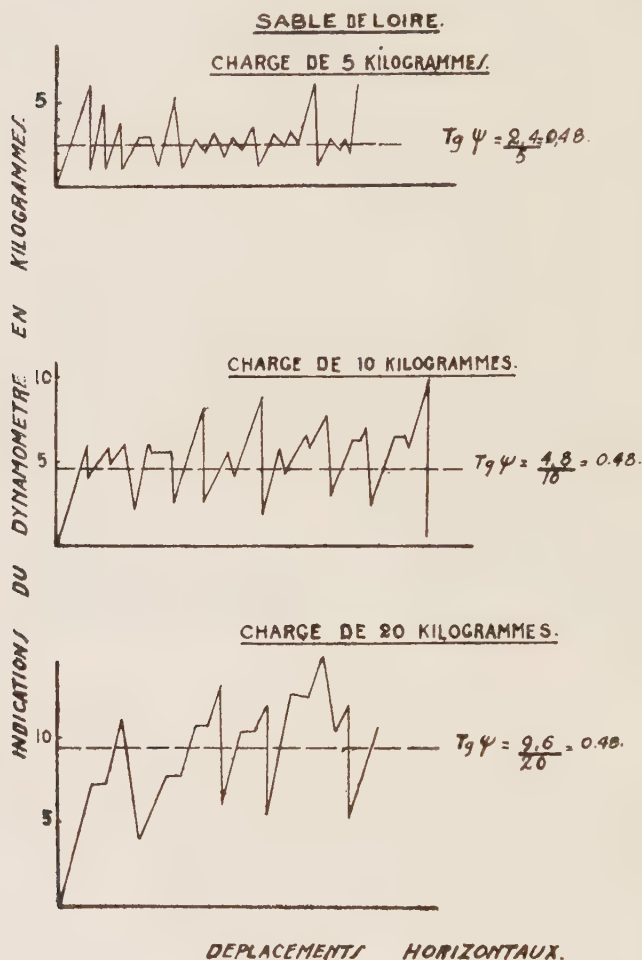


Fig. 5.

le frottement apparent du même sable, avec enchevêtrement, nous a donné un angle φ voisin de 37° , soit

$$\tan \varphi = 0,75.$$

⁽¹⁾ Dans la dernière expérience avec charge de 20 kg, nous avons observé quelques décollements et ruptures de grains.

Notons déjà que le rapport $\frac{\tan \varphi}{\tan \psi} = \frac{0,75}{0,48} = 1,56$ est très voisin de $\frac{\pi}{2}$.

Nous exposerons enfin à propos des résultats sur le sable de Nemours, une troisième méthode consistant à appliquer l'expérimentation précédente au corps solide de même nature que les grains du milieu pulvérulent. Cette méthode nous donnera encore une confirmation satisfaisante de la relation $\tan \varphi = \frac{\pi}{2} \tan \psi$.

Angle du talus naturel. — On confond souvent à tort, l'angle du talus naturel avec l'angle de frottement physique.

L'angle du talus naturel dépend de la façon dont le talus a été construit. Laissons s'écouler, par exemple, du sable de Loire calibré à 4^{mm} à travers un entonnoir maintenu dans une position fixe. La pente des génératrices du cône fermé varie de 0,63 (talus de 32°) à 0,466 (talus de 25°) suivant que l'entonnoir est à 20 ou 50^{cm} de distance verticale de la base du cône. Or ce sable a un angle ψ de 26° et un angle φ de 37°.

Pour le sable de Nemours, à grains beaucoup plus fins, nous trouverons un talus naturel de 31°, constant quelle que soit la hauteur, un angle φ de 30° et un angle ψ de 20°.

Nous ne pensons pas qu'il existe de relations simples entre l'angle du talus naturel et les valeurs des frottements physique ou apparent indépendamment de l'énergie cinétique mise en jeu dans la constitution du talus.

CHAPITRE II.

DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX POUR LA MESURE DU FROTTEMENT APPARENT DANS LES MILIEUX PULVÉRULENTS.

A notre connaissance il existe très peu de mesures directes du frottement apparent des milieux pulvérulents, tout au moins jusqu'à ces dernières années. Nous allons décrire divers dispositifs que nous avons utilisés.

1. Résal ⁽¹⁾ indiquait que pour déterminer l'angle φ d'une terre donnée le moyen le plus simple et le plus pratique consistait

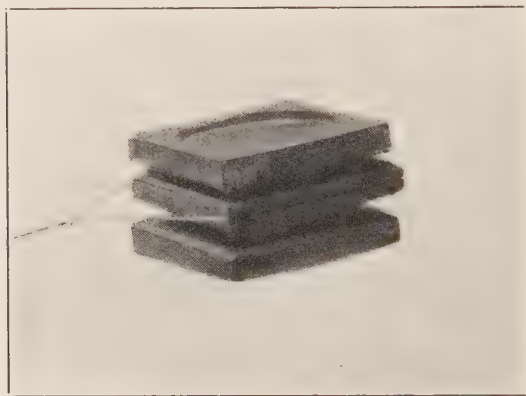


Fig. 6.

« à mesurer la résistance passive au déplacement relatif de deux plaques métalliques pressées fortement l'une contre l'autre avec interposition d'une couche mince de cette terre entre les faces de contact rendues intentionnellement rugueuses. En faisant

⁽¹⁾ *Poussée des Terres*, t. II, p. 11.

varier la pression mutuelle des plaques on aurait plusieurs équations de condition d'où l'on tirerait C et φ ».

Nous avons appliqué ce procédé pour la détermination de la résistance du sol de fondation du pont suspendu de Châteauneuf-sur-Loire.

A cet effet, nous avons fait couler trois plaques carrées de fonte (*fig. 6*).

Les plaques supérieure et inférieure sont maintenues en place par les embases circulaires des deux plateaux d'une presse qui

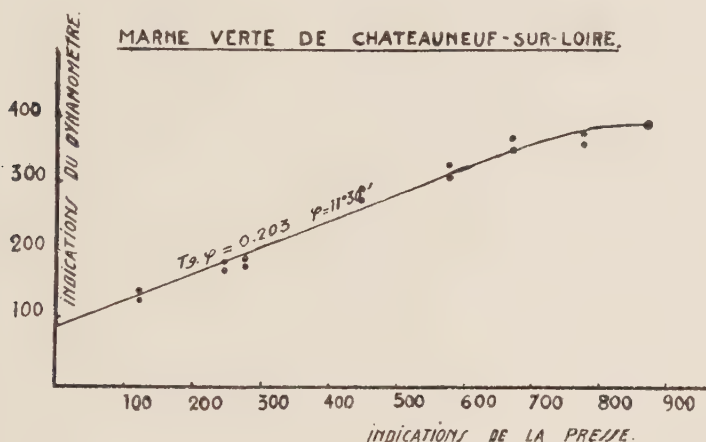


Fig. 7.

viennent se loger dans les cavités circulaires ménagées dans ces deux plaques. La plaque du milieu présente sur trois de ses faces latérales une rainure dans son plan moyen dans laquelle est logé un fil d'acier à haute résistance. La matière à essayer est intercalée d'une part entre la plaque supérieure et la plaque du milieu, d'autre part entre celle-ci et la plaque inférieure; elle est soumise à une compression mesurée au manomètre de la presse. Enfin le fil d'acier qui serre la plaque du milieu est reliée, par l'intermédiaire d'un tendeur à vis, à un extensomètre ou à un dynamomètre qui mesure à chaque instant l'effort de traction réalisé.

Les plaques présentent des stries rectilignes, perpendiculaires à la direction de l'effort de traction.

On a donc à chaque instant les valeurs de l'effort normal et de l'effort tangentiel ce qui permet de connaître le frottement.

Nous donnons ci-après (*fig. 7*) les résultats d'une expérience effectuée avec ce procédé sur la marne verte du terrain de fondation du pont suspendu de Châteauneuf-sur-Loire, au laboratoire de l'Aérodrome de Briey-Boulay (Loiret).

EFFORT NORMAL sur 324 cm ² .	TENSION (en kg).	
	Apparition de la première fissure.	Indication maximum du dynamomètre 5 minutes après une mise en tension.
120.....	125 à 130	140
150.....	170	185
300.....	175	190
450.....	275	290
575.....	315	325
680.....	360	367
780.....	380	385
885.....	395	395

La courbe se présente sous forme d'une courbe rectiligne (*fig. 7*) qui s'incurve légèrement pour des indications du manomètre supérieures à 750^{kg}, soit pour une pression par centimètre carré de

$$\frac{750}{18 \times 18} = 2,3 \text{ kg/cm}^2.$$

La partie rectiligne de la courbe présente une pente de 0,406 et elle coupe l'axe des ordonnées au point 90.

Il faut remarquer que l'effort de traction à réaliser, est égal ici à $2N \tan \varphi$, puisque l'effort de cisaillement s'exerce sur les deux côtés de la plaque.

On en déduit que

$$\tan \varphi = \frac{0,406}{2} = 0,203, \quad \text{d'où} \quad \varphi = 11^{\circ}30',$$

$$C = \frac{90 \text{ kg}}{2 \times 324} = 0,14 \text{ kg/cm}^2, \quad \text{soit} \quad 1,4 \text{ T/m}^2.$$

Le procédé présente de nombreux inconvénients, d'une part parce qu'il est impossible d'essayer des terres pulvérulentes ou peu cohérentes qui s'écoulent latéralement entre les presses, d'autre part parce que, après un certain glissement, la section comprimée entre plaques n'est plus la même, ce qui modifie la pression à laquelle on opère.

Le Laboratoire de l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux Publics à Paris, utilise l'appareil de Krey perfectionné par M. Casagrande aux États-Unis.

Cet appareil est du même genre que celui que nous venons de décrire. Il est cependant moins rudimentaire et évite l'écoulement latéral de la matière à essayer.

L'échantillon est introduit, dans une boîte sectionnée par un plan équidistant des deux bases sur laquelle on fait agir une pression : la partie inférieure est fixe; la partie supérieure peut être tirée par l'intermédiaire d'un levier, en lui appliquant des forces rigoureusement connues.

L'appareil a montré que la courbe intrinsèque est sensiblement rectiligne pour les faibles pressions. Mais il ne permet que d'explorer le domaine des pressions compris entre 0 et 3 kg/cm². De plus il est à glissement rectiligne, et tout glissement modifie la surface de contact initiale.

2. Voici un autre procédé expérimental que nous avons employé pour la détermination de l'angle φ . Ce procédé ne nous semble avoir jamais été utilisé antérieurement.

Considérons une plaque carrée (*fig. 8*) enfoncée à une certaine profondeur dans un massif pulvérulent et suspendue à l'extrémité d'un fléau. Si nous chargeons un plateau suspendu à l'autre extrémité du fléau nous pourrions mesurer exactement l'effort nécessaire pour soulever la plaque enterrée. Supposons en parti-

culier que, au moment de la rupture d'équilibre, les glissements

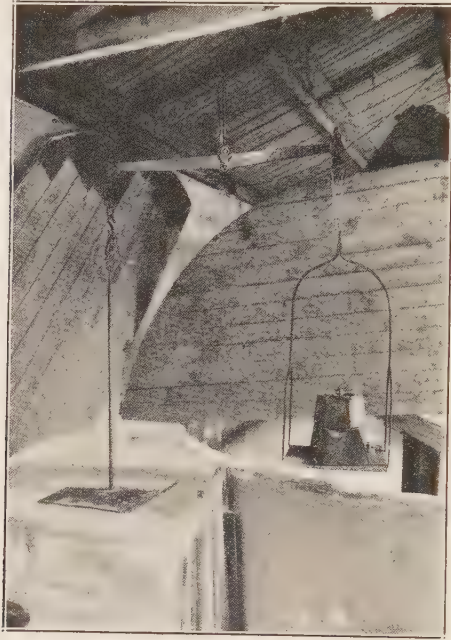


Fig. 8.

s'opèrent à partir des extrémités A et B de la plaque suivant des

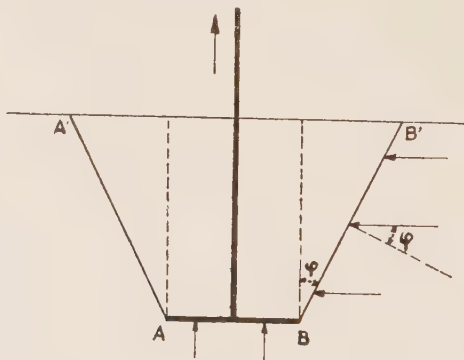


Fig. 9.

plans AA' — BB' inclinés à l'angle φ sur la verticale (*fig.* 9) et

écrivons l'équilibre en projection sur la verticale du tronc de pyramide $AA'BB'$ au moment de l'équilibre limite. Les réactions sur AA' et BB' n'ont pas de composante verticale; sur $A'B'$ n'existe aucune pression; sous AB s'exerce une pression de soulèvement en général très faible qui est d'ailleurs nulle au moment où commence le soulèvement.

Il est facile de se rendre compte que si les glissements supposés ne s'établissent pas, la contrainte sur les plans AA' , AB et BB' aura nécessairement en tous points ⁽¹⁾ une composante verticale dirigée vers le haut, c'est-à-dire que l'effort sur AB sera toujours au plus égal au poids du massif envisagé ci-dessus. Il s'ensuit que l'effort de soulèvement mesuré est une limite inférieure du poids du tronc de pyramide envisagé : d'où la possibilité de calculer une limite inférieure de l'angle φ si l'on connaît le poids spécifique moyen.

Enfin, les pressions auxquelles nous opérons étant très faibles, la moindre cohésion comme celle due à l'humidité donnera une correction importante. Il est donc préférable d'opérer à une profondeur suffisante. Nous donnons ci-après les résultats à diverses profondeurs.

Nous avons déterminé le poids spécifique en taillant le bloc soulevé suivant des formes géométriques simples. On descend à force dans ce bloc une boîte sans fonds à section carrée légèrement inférieure à la surface de la plaque AB qui constitue alors l'un des fonds de la boîte. Une double pesée donne le poids du parallélépipède ainsi taillé, d'où l'on déduit le volume V du tronc de pyramide et l'angle φ par une équation du 2^e degré en $\tan \varphi$.

⁽¹⁾ En tous points de AA' et BB' la réaction latérale sera alors à l'intérieur du cône de frottement.

SECTION de la plaque, (en cm ²).	PROFON- DEUR (en cm).	NATURE DU SABLE.	POIDS spécifique.	EFFORT de soulevé- ment (en kg).	ANGLE calculé (en degrés).
32×32	20	Fortement tassé et humide	1,60	77,8	40
»	20	Non tassé et humide	1,16	37,7	22
40×40	21	Fortement tassé et humide	1,58	126	44
»	21	Tassé et humide	1,49	102	38
6×6	45	Tassé et humide	1,59	131	36
12×12	45	»	1,59	136	32
22,6×22,6	45	»	1,59	204	32

Les résultats sont donc plutôt discordants aux faibles profondeurs mais satisfaisants à grande profondeur, notamment les dernières mesures.

L'angle apparent du sable de Nemours que nous trouverons par la suite est de 30° environ. Mais nous n'avons pas pu opérer à des pressions aussi faibles. Il semble donc que l'angle de frottement croisse aux faibles pressions.

3. Nous avons ainsi passé en revue divers dispositifs expérimentaux que nous avons utilisés pour la détermination de l'angle φ .

Nous allons maintenant décrire le dispositif principal employé par nous et qui nous a permis d'explorer un très vaste domaine de pression.

Description de l'appareil utilisé. — Dans cet appareil ⁽¹⁾ on produit non plus des glissements rectilignes mais des glissements circulaires.

Considérons un tore coupé en deux par son plan de symétrie

(1) Cet appareil dont l'idée est due à M. Caquot a été construit par la S. I. M. E. C., 8, rue Armand Moisant, Paris, à exemplaire unique.

perpendiculaire à son axe de révolution. Emplissons chacun de ces deux demi-tores de l'échantillon à essayer et appliquons-les l'un contre l'autre au moyen d'une force connue. Faisons alors tourner l'un des deux demi-tores autour de son axe et mesurons la force qu'il faut appliquer à l'autre demi-tore pour l'empêcher d'être entraîné dans cette rotation. L'effort que l'on mesurera ainsi sera égal à l'effort de glissement de la matière à essayer sous l'effort normal de compression considéré.

Une objection très naturelle qui se présente à l'esprit est de penser que la matière contenue dans les deux demi-tores glisse sur les parois intérieures de ceux-ci et que par conséquent l'effort mesuré est inférieur à l'effort de glissement cherché de la matière considérée. Il n'en est rien et on constate expérimentalement qu'il n'y a jamais aucun mouvement relatif de la matière essayée par rapport aux parois des deux demi-tores ⁽¹⁾.

Il a d'ailleurs été prévu, au fond des coquilles, des alvéoles en forme de stries pour augmenter l'adhérence. Au surplus, quand on retire de l'appareil la matière essayée, après une longue expérience, on constate qu'elle est toujours absolument intacte sur les parois alors qu'elle est souvent pulvérisée au voisinage du plan de glissement.

Réalisation de l'appareil. — Les figures 10, 11 et 12 représentent l'appareil en coupe et en élévation. La photographie (*fig.* 13) représente l'appareil en ordre de marche.

Il se compose des éléments suivants :

Un bâti B monté sur trépied métallique ;

Un axe A horizontal ;

Une roue à rochet C folle sur l'axe A, comportant une cavité annulaire H, et dont les dents D sont successivement poussées par un rochet E que commande un levier F dont le mouvement de descente provoque la rotation de la roue.

Une roue I folle sur l'axe A, comportant une cavité annulaire J qui fait face à la cavité annulaire H, cette roue I pouvant glisser longitudinalement sur l'axe A dans la direction de la roue C.

⁽¹⁾ En fait la section génératrice n'est pas circulaire mais ovoïde de façon à augmenter la surface des parois par rapport à la surface de glissement.

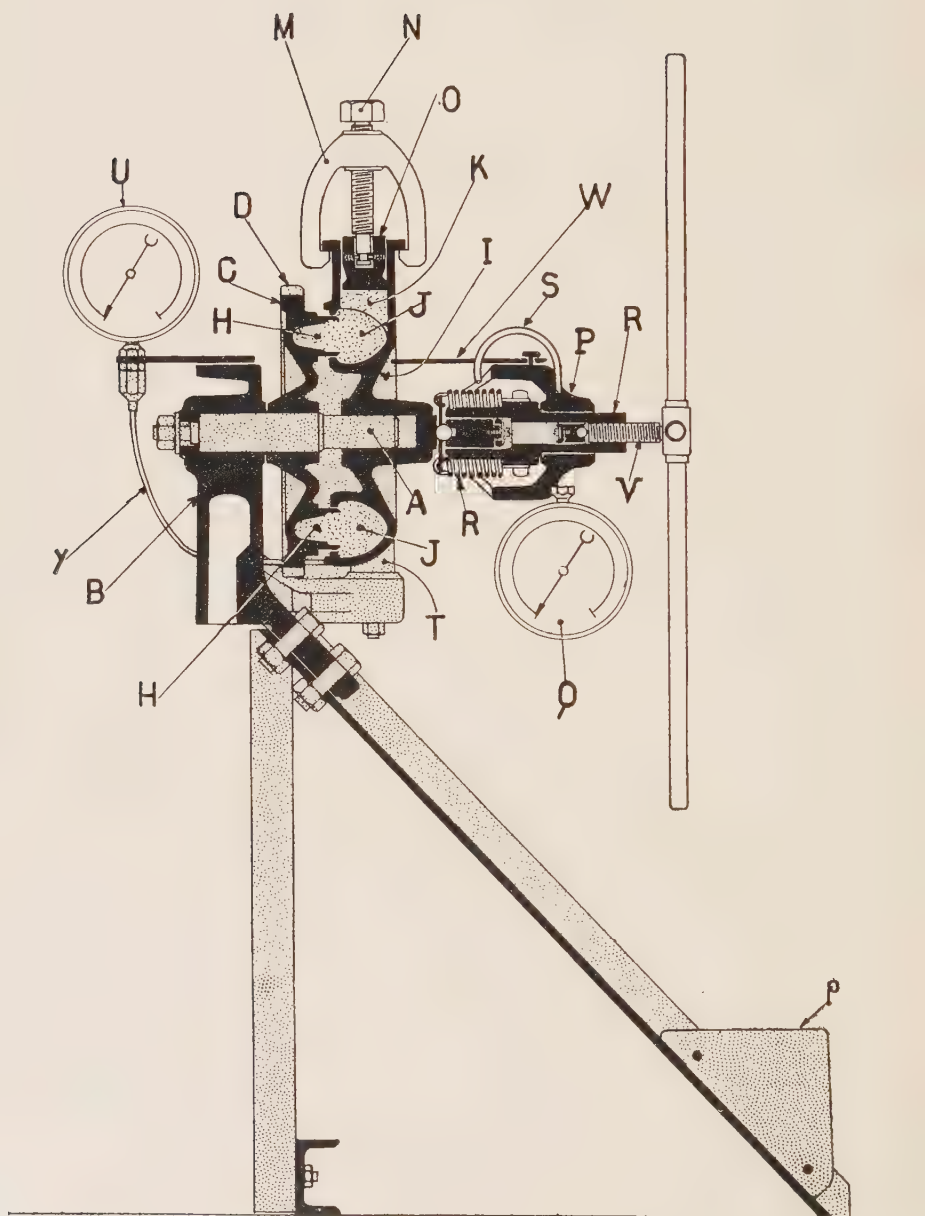


Fig. 10.

L'espace vide annulaire constitué par les cavités H et J est rempli de la matière à essayer en utilisant une goulotte K venue de fonderie sur la roue I et fermée après remplissage par un obtura-

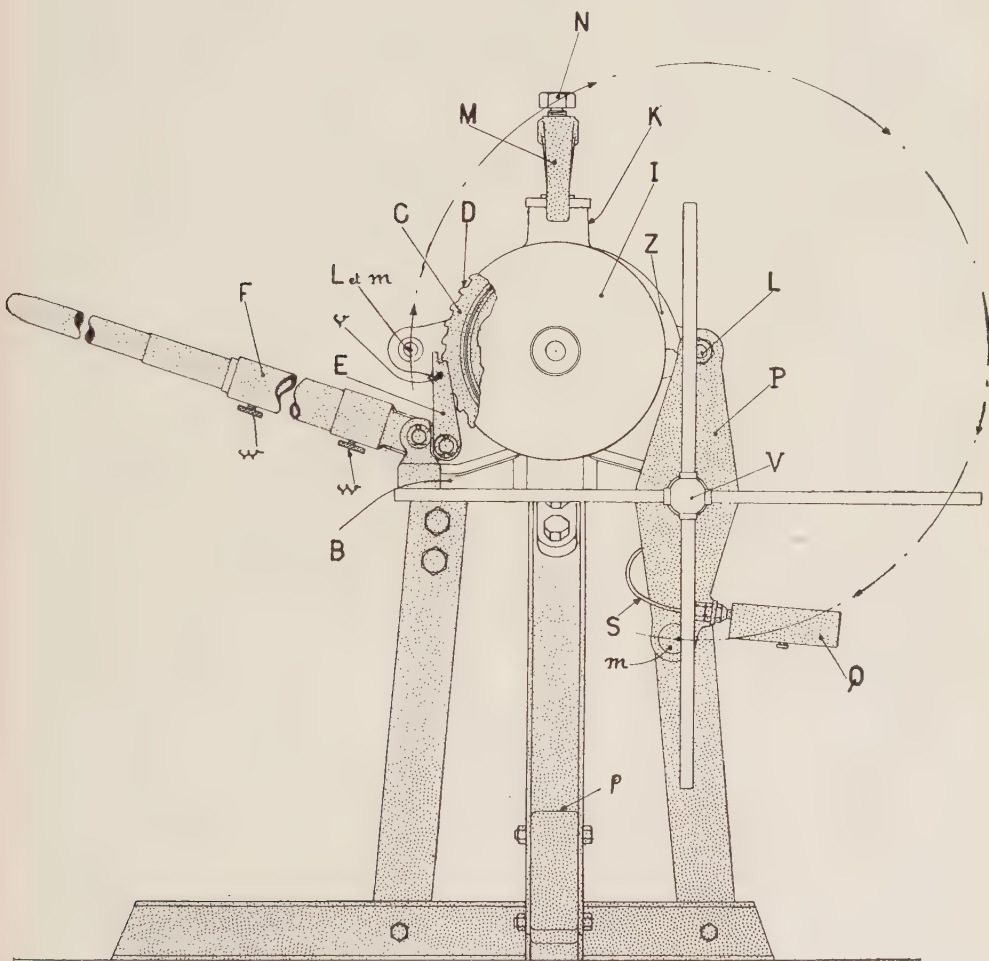


Fig. 11.

teur O que maintiennent en place une traverse amovible M ainsi qu'une vis N.

Deux tirants L horizontaux invariablement fixés au bâti.

Un palonnier horizontal P ancré sur les extrémités des deux tirants L.

Une presse hydraulique pousseuse horizontale, montée au centre du palonnier P et actionnée au moyen d'une vis à quatre bras V : cette presse R est reliée à un manomètre Q qui permet

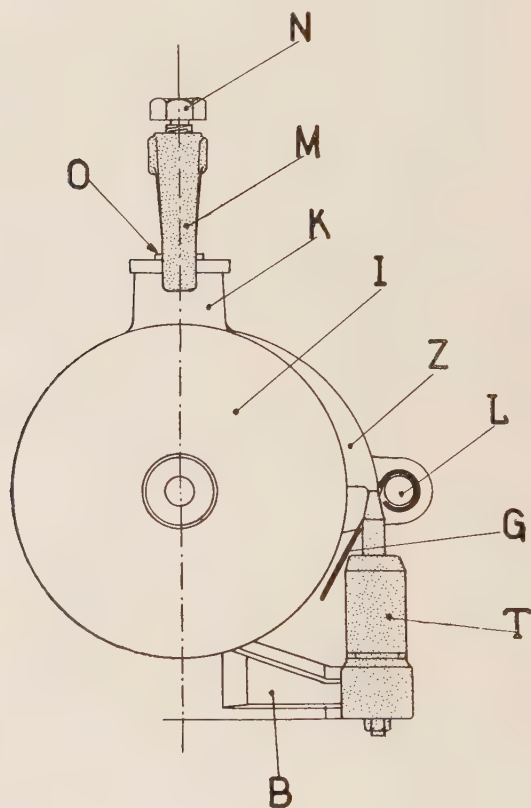


Fig. 12.

de connaître la pression unitaire exercée dans le plan de séparation des cavités annulaires H et J remplies de la matière à essayer.

Une presse hydraulique dynamométrique T verticale montée au-dessous d'un des tirants L, reliée à un manomètre U : cette presse T reçoit la poussée verticale, dirigée de haut en bas, d'un doigt Z venu de fonderie sur la roue I ; le manomètre U permet de

connaître l'effort de butée du doigt Z sur la presse T qui s'oppose



Fig. 13.

à la rotation de la roue I lorsqu'on fait tourner la roue C au moyen du rochet E manœuvré par le levier F.

Caractéristiques de l'appareil. — *a.* Surface annulaire de contact :

Grand diamètre.....	25 ^{cm}
Petit diamètre.....	17 ^{cm}
Surface.....	264 ^{cm²}

b. Profondeurs des cavités annulaires à partir de la surface de contact :

$$\text{Cavité H} = 5^{\text{cm}}, 20$$

$$\text{Cavité I} = 7^{\text{cm}}, 00$$

c. Capacité de l'appareil : 3510^{cm³}.

d. Course possible du piston de la presse pousseuse : 4^{cm}.

e. Diamètre des pistons des presses :

$$\text{Presse pousseuse.....} \quad d = 3^{\text{cm}}, 5$$

$$\text{Presse dynamométrique.....} \quad d = 3^{\text{cm}}, 5$$

La surface d'action de chaque piston est donc : 9^{cm²}, 61.

f. Distance de l'axe de rotation du point de contact du doigt Z avec la presse U verticale : 17^{cm}, 5.

h. Les manomètres Q et U indiquent les pressions en centimètres carrés dans les corps de presses, ils sont gradués jusqu'à 600^{kg/cm²}. Pour les expériences à faibles pressions, nous y substituons des manomètres gradués de 0 à 100 ^{kg/cm²}.

Interprétation des lectures de l'appareil. — Considérons une expérience déterminée au cours de laquelle *q* et *u* sont les indications respectives des deux presses Q et U.

Quelles sont les valeurs moyennes des pressions réelles normales et tangentielle *n* et *t* correspondantes ?

On a évidemment

$$n = \frac{9,61}{264} q = 0,0364 q,$$

$$t = \frac{9,61 \times 17,5}{\int_{8,5}^{12,5} 2\pi r^2 dr} u = 0,060 u;$$

d'où

$$\text{tang } \varphi = \frac{0,0600}{0,0365} \frac{u}{q} = 1,647 \frac{u}{q}, \quad \text{soit } 1,65 \frac{u}{q}.$$

L'abaque suivante (fig. 14) donne directement l'angle φ en fonction des indications q et u lues sur l'appareil.

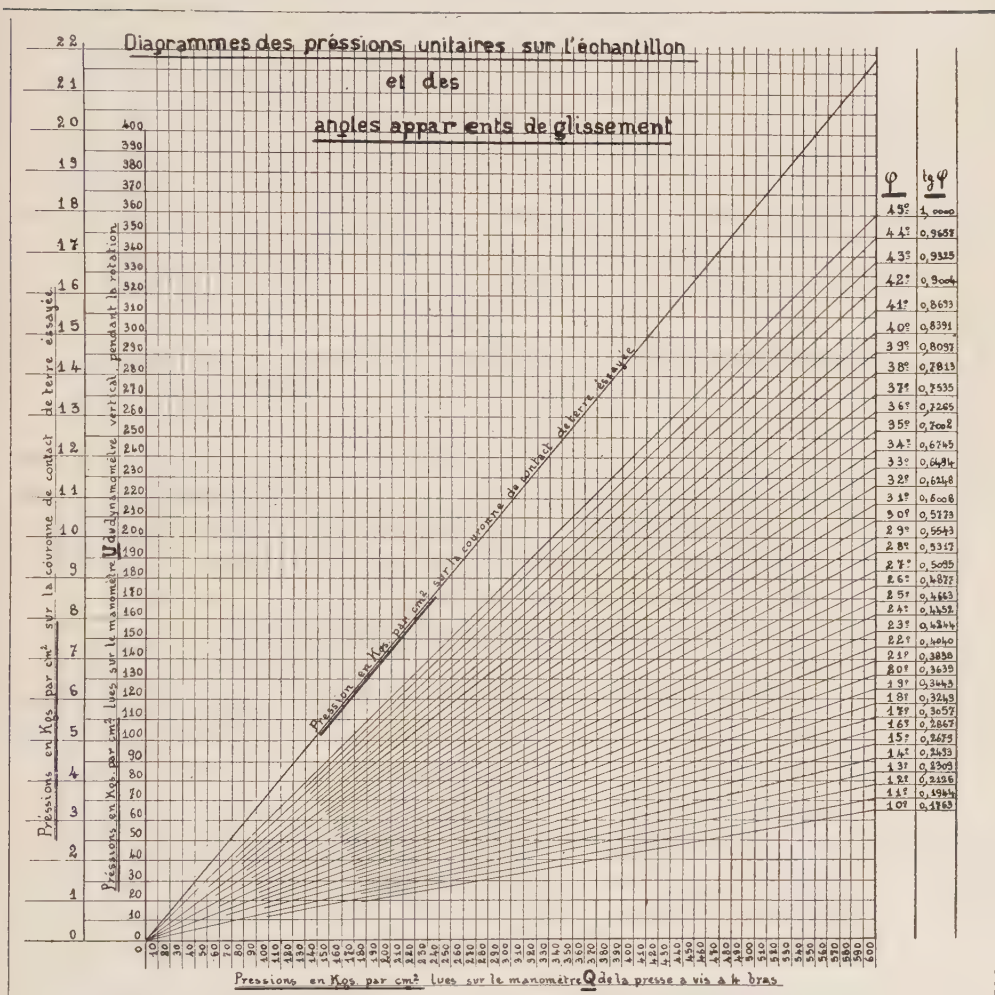


Fig. 14.

En ce qui concerne la cohérence, il suffit de prendre le point d'intersection de la courbe q, u avec l'axe des ordonnées et de multiplier par 0,06 pour avoir en kilogrammes par centimètre carré la cohérence.

On remarquera que la pression de 600^{kg} réalisée au manomètre Q correspond à une pression sur la matière à essayer de

$$600 \times 0.0365 = 21,9 \text{ kg/cm}^2.$$

A notre connaissance, il ne semble pas qu'on ait auparavant expérimenté les milieux pulvérulents au delà de 5 kg/cm^2 .

Erreurs de lectures. — Parmi les erreurs, il y en a de systématiques qui sont dues aux presses.

Les presses hydrauliques à huile Q et U ont en effet comme garniture d'étanchéité des petits cuirs emboutis dont le frottement sur les parois des cylindres est loin d'être négligeable.

Il en résulte que les lectures faites sur les manomètres Q et U doivent être corrigées, et ce sont ces lectures corrigées qu'il y a lieu de reporter sur les diagrammes de pressions unitaires et d'angles apparents de glissement.

Lectures au manomètre Q. — La pression enregistrée par ce manomètre correspond à une valeur de n erronée par excès; car la pression du liquide de sa presse doit vaincre la résistance du cuir embouti avant de pousser la roue I.

Lectures au manomètre U. — La pression enregistrée par ce manomètre correspond à une valeur de t erronée par défaut; car le liquide de sa presse est mis en pression par l'effort du doigt Z diminué de la résistance du cuir embouti.

Lectures corrigées. — De nombreux essais à l'usine ont été faits avec les presses R et T sur une presse étalon; les moyennes des lectures faites au cours de ces essais conduisent à une loi simple de correction :

Dans les presses R et T qui ont toutes deux le même alésage de 35^{mm} et le même type de cuir embouti (qui a 9 millimètres de contact avec les parois du cylindre selon les génératrices) le rendement qui est le rapport des pressions réellement exercées aux pressions indiquées, s'évalue comme suit :

1° *De zéro à 350^{kg} lus au manomètre de la presse le rendement est constant et égal à 0,96;*

2° De 350^{kg} à 600^{kg} *lus au manomètre de la presse* le rendement décroît linéairement de 0,96 à 0,925.

Le schéma ci-dessous (*fig. 15*) donne la représentation graphique de cette loi.

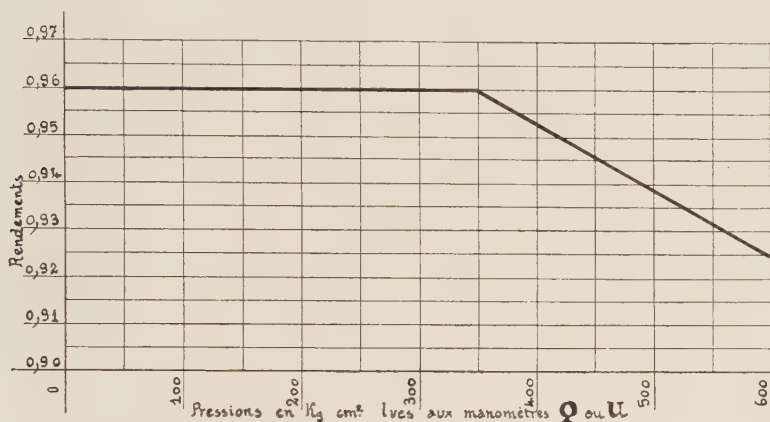


Fig. 15.

Il en résulte de ce qui précède que si q et u sont les lectures faites aux manomètres de même nom et si p_1 et p_2 sont les rendements correspondants, il y aura lieu de ne faire état que des lectures corrigées suivantes :

$$q \times p_1 \quad \text{pour le manomètre Q}$$

et

$$\frac{u}{p_2} \quad \text{pour le manomètre U.}$$

Les diagrammes représentés ci-après tiennent compte de ces corrections. Le tableau ci-après donne directement les lectures corrigées.

TABLEAU DES LECTURES CORRIGÉES.

PRESSIONS corrigées à considérer pour manomètre Q.	PRESSIONS lues aux manomètres Q et U.	PRESSIONS corrigées à considérer pour manomètre U.	PRESSIONS corrigées à considérer pour manomètre Q.	PRESSIONS lues aux manomètres Q et U.	PRESSIONS corrigées à considérer pour manomètre U.
kg		kg	kg		kg
9,600	10	10,416	297,600	310	322,916
19,200	20	20,833	307,200	320	333,333
28,800	30	31,250	316,800	330	343,750
38,400	40	41,666	326,400	340	354,166
48,000	50	52,083	336,000	350	364,583
57,600	60	62,500	345,096	360	375,547
67,200	70	72,916	354,164	370	386,544
76,800	80	83,333	363,204	380	393,572
86,400	90	93,750	372,216	390	408,633
96,000	100	104,166	381,200	400	419,727
105,600	110	114,583	390,156	410	430,853
115,200	120	125,000	399,084	420	442,012
124,800	130	135,416	407,984	430	453,204
134,400	140	145,833	416,856	440	464,428
144,000	150	156,250	425,700	450	475,687
153,600	160	166,666	434,516	460	486,978
163,200	170	177,083	443,304	470	498,303
172,800	180	187,500	452,064	480	509,662
182,400	190	197,916	460,796	490	521,054
192,000	200	208,333	469,500	500	532,481
201,600	210	218,750	478,176	510	543,941
211,200	220	229,166	486,824	520	555,436
220,800	230	239,583	495,444	530	566,866
230,400	240	250,000	504,036	540	578,330
240,000	250	260,416	512,600	550	590,128
249,600	260	270,833	521,136	560	601,762
259,200	270	281,250	529,644	570	613,430
268,800	280	291,666	538,124	580	625,134
278,400	290	302,083	546,576	590	636,873
288,000	300	312,500	555,000	600	648,648

CHAPITRE III.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

Nous avons d'abord fait porter nos recherches sur le sable de Nemours, qui servira de base à notre étude sur les fondations, puis sur le sable de Loire et sur divers matériaux de broyage.

1. — EXPÉRIENCES SUR LE SABLE DE NEMOURS.

C'est un sable à grains très fins (de l'ordre du dixième de millimètre); très blanc, très pur (99,5 pour 100 de silice), homogène, ce sable est recherché pour des applications industrielles notamment la verrerie et les silicatages.

Humide, son poids spécifique varie très largement de 1,1 à 1.65 suivant le tassement. Sec, à pression nulle, il présente un poids spécifique voisin de 1,57.

Ce sable sec coule parfaitement; l'angle du talus naturel paraît être de 31°. Il a été déterminé en laissant couler le sable, d'une série de hauteurs, à travers un entonnoir de 2^l.

Hauteur de chute de sable.	Angle du talus naturel.
0,10.....	31.00 ⁰
0,15.....	31.50
0,20.....	30.40
0,25.....	31.15
0,30.....	30.40
0,35.....	30.30
0,40.....	31.10

Le poids spécifique du milieu a pu être déterminé, à chaque instant de l'expérience, sous les diverses pressions, de la manière suivante. Après jaugeage à l'eau, on trouve que le volume des deux

coquilles de l'appareil est 3510cm^3 ; c'est le volume offert au milieu quand les coquilles ont une pénétration nulle. A ce moment l'écartement de la vis à 4 bras par rapport à sa position de butée est de $2^{\text{cm}},3$; la surface de contact des deux coquilles étant 264cm^2 , si à un instant donné Δ est l'écartement de la vis à 4 bras par rapport à sa butée, le volume offert au mélange est

$$3510 \pm (2,3 \pm \Delta)264$$

Il suffit de faire, en fin d'expérience, une double pesée, de l'appareil plein puis vide pour connaître le poids de matière essayée, d'où le poids spécifique à chaque instant suivant la valeur de Δ .

Le coefficient d'humidité est déterminé en faisant passer à l'étuve la matière essayée, pesant avant et après, et rapportant le poids d'eau évaporé au poids de matière sèche.

Le jeu étant de $7/10^{\circ}$ de millimètre, il a fallu confectionner un joint ⁽¹⁾ pour empêcher les fuites de sable.

1. Nous allons d'abord décrire en détail une expérience sur du sable non préparé dont le coefficient d'humidité était de 5 pour 100, et montrer l'importance de l'enchevêtrement des grains.

Introduisons le sable dans l'appareil. Le poids spécifique est alors 1,24. Serrons la vis à 4 bras jusqu'à ce que la pression indiquée au manomètre de pression soit de 100^{kg} . Le poids spécifique devient 1,27; si nous cisailons, le manomètre de cisaillement indique $16,6^{\text{kg}}$. Arrêtons un instant le cisaillement; à ce moment, on constate une chute de pression de 25 pour 100. Rétablissons la pression et recommençons le cisaillement. La nouvelle lecture est 20^{kg} . Arrêtons à nouveau; on constate aussitôt une chute de pression qui n'est plus que de 20 pour 100. A la reprise, la nouvelle indication du manomètre de cisaillement est 23^{kg} . Continuons à faire des reprises : les résultats sont résumés dans le tableau ci-après dans lequel nous avons inscrit à titre de renseignement les valeurs du manomètre Q après cisaillement.

Indication du manomètre de compression avant cisaillement : 100^{kg} .

(1) Ce joint a été constitué avec de la toile caoutchoutée de qualité supérieure, de 15^{mm} de largeur collée sur la partie mâle usinée de la roue à rochet C.

Poids spécifique.	Indication du manomètre Q après cisaillement.	Valeur du cisaillement.
I, 27.....	75	16,5
»	80	20
»	82	23
»	84	28
»	86	29
»	90	31
»	91	32
»	92	32
»	93	32
I, 28.....	95	32
»	»	34
»	»	33
»	»	32
»	96	32
»	»	32
»	»	32
I, 29.....	97	32
»	»	32
»	»	32

Ainsi donc, quel que soit le nombre des reprises, le cisaillement tend vers une limite bien définie. Le processus de l'augmentation du cisaillement paraît être le suivant :

Dans le plan moyen de glissement, les grains des deux coquilles sont en contact pendant le cisaillement de la même façon que deux pignons dentés en mouvement relatif sans pénétration des dents. Dès que le cisaillement est interrompu, les grains s'engrènent et s'enchevêtrent. Cette imbrication des grains est accompagnée d'une augmentation de densité d'où résulte la chute de pression observée au manomètre Q. En faisant des reprises successives, on augmente l'enchevêtrement jusqu'à un état limite, donnant une valeur de cisaillement constante, sans baisse sensible de pression aux reprises : les dents et les creux se sont nivelés; au voisinage du plan de glissement, la matière s'est rapprochée d'un état isotrope.

Avant de recommencer cette expérience à des pressions croissantes, faisons incidemment l'expérience suivante : démontons l'appareil, ameublissons le sable sur quelques centimètres au voisinage du plan de glissement et remontons l'appareil qui contient toujours la même quantité de matière. Le poids spécifique est 1,29

pour une pression indiquée de 100^{kg}. Laissons le sable sous pression pendant 24 heures. On constate que le poids spécifique augmente jusqu'à 1,31. Refaisons alors les reprises précédentes.

Poids spécifiques.	Indication du manomètre Q après cisaillement.	Valeur du cisaillement.
1,31.....	75	23
1,31.....	80	33
»	85	35
»	90	35
»	90	33
»	90	33
1,32.....	92	34
»	94	33
»	94	33
»	94	33
»	94	34
»	94	34
1,33.....	95	34
»	»	34
»	»	34
»	»	33
»	»	33
»	»	33
»	»	33

On retrouve donc la même valeur limite de cisaillement, mais elle est beaucoup plus rapidement atteinte et les premières valeurs de cisaillement sont supérieures à celles que nous avons trouvées précédemment. Le tassement sous charge, comme les reprises, produit une augmentation de la valeur du cisaillement.

Nous étudierons cette question en détail plus loin.

Augmentons la pression à 200^{kg}, 250^{kg}, 300^{kg}. Voici les valeurs de reprises que nous trouvons :

A 200^{kg} :

16,5 — 59 — 62 — 64 — 63 — 64 — 65 — 65 — 65 — 64 — 64
64 — 64 — 64 — 64 — 64

A 250^{kg} :

72 — 76 — 78 — 79 — 80 — 79 — 80 — 78 — 81 — 81 — 81
80 — 80 — 79 — 79 — 80 — 81 — 80 — 80 — 80

A 300^{kg} :

93 — 94 — 94 — 94 — 94 — 94 — 94 — 95 — 95 — 94 — 95
96 — 95 — 96 — 96 — 96 — 96 — 96 — 96 — 96 — 96

Le poids spécifique est alors de 1,38. Il semble donc y avoir une valeur limite de cisaillement à chaque pression, cette valeur limite croissant linéairement avec la pression.

Augmentons la pression jusqu'à 400^{kg} et laissons l'appareil en charge pendant 24 heures. Le sable se tasse; le poids spécifique devient 1,41. Aux reprises, on note les valeurs suivantes :

135 — 135 — 135 — 138 — 137 — 135 — 135 — 134 — 135 — 135

Ce point est nettement au-dessus de la droite déterminée par les valeurs limites précédentes.

On constate donc que, si on laisse en charge des grains déjà enchevêtrés, le cisaillement est supérieur à la valeur limite aux reprises constatées précédemment.

A 500^{kg} et 600^{kg}, aux reprises, on note les valeurs suivantes :

A 500^{kg} :

155 — 158 — 161 — 160 — 161 — 160 — 160 — 160 — 160 — 160

A 600^{kg} :

170 — 185 — 182 — 183 — 185 — 183 — 185 — 182 — 184 — 184 — 184

Le poids spécifique est alors de 1,44.

Diminuons la pression à 500^{kg}. On constate qu'au premier cisaillement une augmentation de pression de l'ordre de 5 pour 100. Cette augmentation de pression, se manifeste pendant quelques reprises, après quoi la pression reste constante. Nous ferons toujours, par la suite, les mêmes observations. Ceci est à rapprocher des chutes de pression dans la détermination de la courbe d'aller. Les grains se désenchevêtrent progressivement.

Voici, aux reprises, les valeurs de cisaillement notées :

A 500^{kg} :

180 — 170 — 170 — 168 — 168 — 163 — 163 — 160 — 159 — 160
160 — 160 — 160 — 160 — 160 — 160 — 160

Poids spécifique : 1,437.

A 400^{kg} :

142 — 139 — 138 — 135 — 136 — 134 — 134 — 135 — 133 — 132
 132 — 133 — 133 — 133 — 130 — 130 — 131 — 130 — 132 — 129
 130 — 129 — 128 — 130 — 129 — 128 — 127 — 127 — 127 — 127
 127 — 127 — 127 — 127

Poids spécifique : 1,435.

On constate donc une diminution des valeurs de cisaillement qui tendent vers une limite qui se place sur la courbe d'aller, trouvée plus haut. Toutefois, on note que cette limite est plus lentement et moins régulièrement atteinte. De plus, dans chaque état de compression le poids spécifique est plus élevé qu'à l'aller. La décompression se fait mal et ceci est peut-être dû, pour une grande part, à la forme des coquilles. Ces phénomènes vont s'accroître et à 300^{kg} de pression, nous n'arriverons pas à observer de valeurs limites bien déterminées.

A 300^{kg} :

113 — 104 — 102 — 102 — 102 — 102 — 102
 102 — 102 — 101 — 102 — 100 — 101 — 101
 100 — 100 — 101 — 99 — 99 — 100 — 99
 100 — 100 — 99 — 98,5 — 99 — 97 — 95
 95 — 95,5 — 96 — 96 — 95,5 — 95 — 95
 94 — 93,5 — 94 — 94 — 92 — 93 — 91
 91 — 90,5 — 90,5 — 90 — 90,5 — 90 — 90
 89 — 90,5 — 89 — 89 — 87 — 87,5 — 86
 88 — 87 — 86 — 87 — 87 — 88 — 88
 86 — 86 — 87 — 86 — 87 — 87 — 88,5
 89 — 89,5 — 89,5 — 89,5 — 90 — 90,5 — 90,5
 92 — 93 — 93,5 — 94,5 — 94 — 94 — 95
 94,5 — 95 — 95,5 — 96 — 96 — 97 — 96,5
 98 — 98 — 98 — 100 — 100 — 100 — 100
 101 — 102 — 102 — 103 — 104 — 104 — 105

Poids spécifique : 1,434.

Le phénomène le plus inattendu est que, après avoir observé une diminution des valeurs du cisaillement, on observe une augmentation après la décompression ; il semble qu'il y ait à nouveau

enchevêtrement des grains. Laissons d'ailleurs la charge de 300^{kg} pendant 24 heures et recommençons les reprises. On note alors les valeurs suivantes :

112—110—109—109—108—108—108—109—108—107
 106—105—103—103—104—103—105—107—108—109
 110—110—110—110—110—110—110—110—110—110
 110—110

Cette valeur de 110 est bien supérieure à la valeur d'aller.
 Voici enfin les résultats aux pressions de 100, 50 et 20^{kg}.

A 100^{kg} :

41,5—39 —39,5—39 —38—38 —38 —38 —38
 38 —33 —38 —38 —38—38 —38 —38 —38
 38 —38 —38 —38 —38—38 —37,5—37,5—37
 37,5—37,5—37 —37—37—37—37,5—37,5—37,5
 37,5—38 —38 —38 —38—38

Poids spécifique : 1,42.

A 50^{kg} :

24,5—25—22 —21,5—21,5—21,5—21,5—21,5—21,5
 21 —21—20,5—21 —21 —21 —21 —21 —21

Poids spécifique : 1,41

A 20^{kg} :

10,5—10 —9,5—9—9 —9 —9 —9 —9 —9
 8,5—8,5—8,5—8—8 —7,5—7,5—7,5—7,5—7
 7 —7 —7 —7—7 —7 —7 —7 —7 —7

Poids spécifique : 1,40

Nous résumons dans le tableau ci-après les valeurs du cisaillement limite. Ce tableau met en évidence les poids spécifiques à l'aller et au retour.

ALLER.				POIDS spécifique.	POIDS spécifique.	RETOUR.			
PRESSION.		CISAILEMENT.				PRESSION.		CISAILEMENT.	
Lecture du manomètre Q.	En kg/cm² corrigés.	Lecture du manomètre U.	En kg/cm² corrigés.			Lecture du manomètre Q.	En kg/cm² corrigés.	Lecture du manomètre U.	En kg/cm² corrigés.
100	3,5	33	2,06	1,33	↑ 1,40	20	0,7	7	0,42
200	7	64	4	1,355	1,41	50	1,75	21	1,24
250	8,75	80	5	1,37	1,42	100	3,5	38	2,36
300	10,5	96	6	1,38	1,434	300	10,5	110	6,9
400	13,9	135	8,40	1,41	1,435	400	13,9	127	7,94
500	17,1	160	10	1,43	1,437	500	17,1	160	10
600	20,5	184	11,48	1,44 ↓	1,44	600	20,5	184	11,48

Ces résultats sont traduits par la courbe ci-dessous. A l'aller la loi de Coulomb paraît bien vérifiée, surtout pour les pressions supérieures à 10 kg/cm².

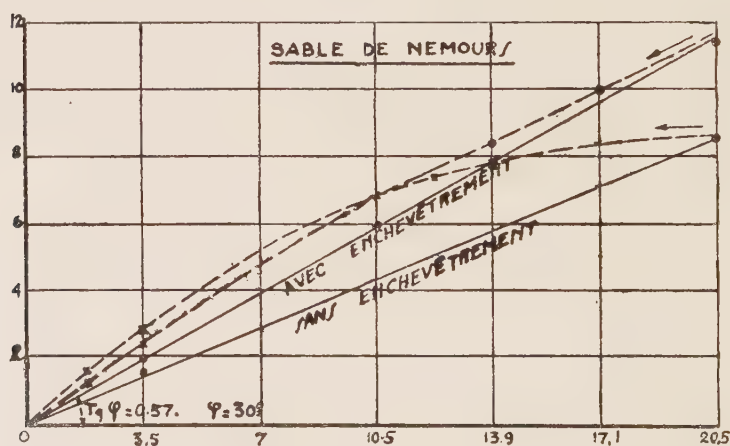


Fig. 16.

La courbe intrinsèque (fig. 16) fait apparaître un angle de frottement de 30° environ avec enchevêtrement.

Il nous a paru intéressant de comparer ici cet angle apparent à *l'angle physique*. Les grains du sable de Nemours étant très fins, on ne pouvait songer à les fixer sur un support. La seule méthode possible était de mesurer le frottement du grès de Fontainebleau dont la décomposition donne le sable de Nemours.

Le dispositif utilisé est décrit par la photographie ci-jointe (*fig. 17*).

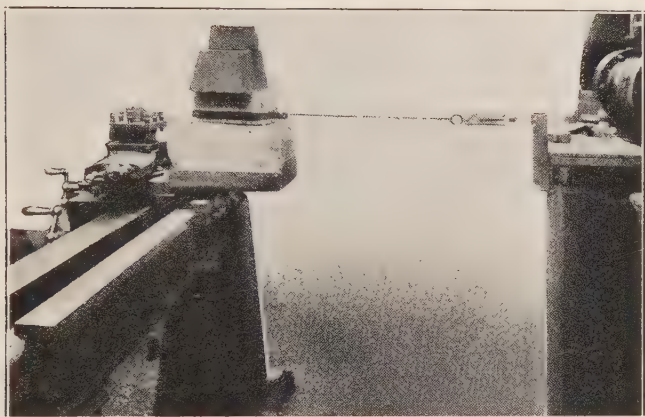


Fig. 17.

Deux blocs de grès parallélépipédiques sont en contact par leurs faces dressées. Le plus gros est porté par un plateau solide d'un tour et animé d'un mouvement de translation très lent par rapport au plus petit qui porte un collier fixé à un peson.

Ce dispositif dérive de celui que nous avons employé par la mesure du frottement physique des grains de sable de Loire, mais il donne des mesures beaucoup plus régulières.

Le poids propre du petit bloc est 6^{kg} . Voici les différentes lectures :

1^o Charge de 10^{kg} . Surcharge totale 16^{kg} .

Tensions :	6	— 5,5 — 6	— 5,5 — 6	— 5,5 — 6	— 5,5
6	— 6 — 6,5 — 6	— 6,5 — 4,5 — 5,5 — 5	— 6	— 5,5	
6	— 6 — 6,5 — 7	— 4,5 — 6,5 — 4,5 — 6	— 5,5 — 4,5		
6,5 — 7	— 5	— 6,5 — 6			

La moyenne de ces lectures est 5,75, d'où

$$\text{tang} \psi = \frac{5,75}{16} = 0,36.$$

2° Charge de 20^{kg}. Surcharge totale : 26^{kg}.

Tensions . 11 — 10,5 — 12 — 8,5 — 12 — 11 — 12
 10 — 11 — 10 — 12 — 11 — 13 — 12 — 13,5 — 12,5
 13 — 10,5 — 13 — 11,5 — 13 — 11,5 — 12 — 13 — 9
 12 — 9 — 12 — 8,5

La moyenne de ces lectures est 11, d'où

$$\text{tang} \psi = \frac{11}{26} = 0,425.$$

3° Charge de 30^{kg}. Surcharge totale : 36^{kg}.

Tensions : 16,5 — 16 — 18 — 15 — 18 — 15,5 — 18 — 15
 18 — 14 — 16,5 — 15,5 — 18 — 14 — 18 — 14,5 — 18

La moyenne de ces lectures est 16, d'où

$$\text{tang} \psi = \frac{16}{36} = 0,445.$$

Comparons les valeurs de $\text{tang} \psi$ à $\text{tang} \varphi = \text{tang} 29^{\circ}, 40' = 0,57$.
 Pour la première charge,

$$\psi = 20^{\circ}, \quad \frac{\text{tang} \varphi}{\text{tang} \psi} = \frac{0,57}{0,36} = 1,58.$$

Pour la deuxième charge,

$$\psi = 23^{\circ}, \quad \frac{\text{tang} \varphi}{\text{tang} \psi} = \frac{0,57}{0,425} = 1,34.$$

Pour la troisième charge,

$$\psi = 24^{\circ}, \quad \frac{\text{tang} \varphi}{\text{tang} \psi} = \frac{0,57}{0,445} = 1,20.$$

La relation $\frac{\text{tang} \varphi}{\text{tang} \psi} = \frac{\pi}{2}$ est parfaitement vérifiée pour la première lecture, mais moins bien pour les deux autres. Ceci s'explique : après la deuxième et la troisième expérience, nous avons constaté

que, sous la forte pression de contact, les faces des deux blocs s'étaient désagrégées à tel point qu'il en résultait un petit matelas de sable qui transformait progressivement l'effort de glissement, en effort de roulement.

C'est donc la première expérience à plus faible pression qui est la seule correcte.

L'angle de 30° trouvé dans nos expériences est bien supérieur à l'angle qui résulterait d'expériences faites sans reprises à poids spécifique égal.

L'expérience détaillée que nous avons faite à 100 kg de pression montre déjà qu'à poids spécifique égal ($1,27$) la valeur de cisaillement est inférieure de 50 pour 100 à la valeur du cisaillement obtenu après reprises.

Voici, de plus, les cisaillements que l'on observe en décrivant d'une seule battue sans aucune reprise, le diagramme précédent, avec des poids spécifiques comparables (¹).

ALLER.				POIDS spécifique.	POIDS spécifique.	RETOUR.			
PRESSION.		CISAILLEMENT.				PRESSION.		CISAILLEMENT.	
Lecture.	En kg/cm².	Lecture.	En kg/cm².			Lecture.	En kg/cm².	Lecture.	En kg/cm².
100	3,5	25	1,56			1,32	↑ 1,35	50	1,75
350	12,2	75	4,7	1,37	↑ 1,365	100	3,5	46	2,86
600	20,5	137	8,54	1,405	↑ 1,395	350	12,2	121	7,44
				↓ 1,405	1,405	600	20,5	137	8,54

Ces valeurs sont reportées sur le diagramme précédent. L'angle

(¹) Ce tableau résulte de moyennes; les lectures sont difficiles à faire. Il faut en faire 6 pendant la course du levier et l'on n'est pas toujours certain que l'aiguille du manomètre de cisaillement ait atteint sa limite. De plus, elles peuvent être subjectives, étant donné qu'elles exigent un mouvement lent et uniforme, tout à-coup de l'opérateur pouvant provoquer un enchevêtrement des grains.

apparent est $22^{\circ}30'$ ($\tan \varphi = 0,414$). La courbe de retour est très horizontale au départ : il y a hystérésis.

Les expériences précédentes mettent en relief l'importance de l'*enchevêtrement* des grains ; à poids spécifique égal, les coefficients de frottement diffèrent profondément suivant qu'il y a eu ou non enchevêtrement préalable. Des cisaillements répétés, à une pression donnée, augmentent le cisaillement qui tend vers une limite croissant linéairement avec la pression.

2. Les premières expériences décrites notamment à 100 et 400^{kg} de charge font pressentir l'influence du *tassement*.

A 100^{kg}, en particulier, nous avons observé qu'un tassement pendant 24 heures, augmentait la valeur du cisaillement instantané.

Nous avons voulu préciser ce point.

Reprenons du sable mouillé à 5 pour 100 et introduisons-en une certaine quantité dans l'appareil. Faisons un cisaillement instantané ; l'indication du manomètre de cisaillement est 65^{kg} pour un poids spécifique de 1,42. Des cisaillements avec reprises donnent 95^{kg}. Déchargeons l'appareil et rechargeons-le avec une même quantité de sable. Soumettons-le à une pression de 300^{kg} pendant 12 jours dans l'appareil, en corrigeant constamment avec la vis à 4 bras les baisses de pression causées par le tassement du sable. Le poids spécifique qui était 1,42 au début devient, après les 12 jours de tassement 1,64. Le cisaillement instantané donne alors 90^{kg}, et si nous effectuons des reprises, nous faisons les lectures suivantes :

90 — 92 — 92 — 93 — 95 — 94,5 — 94 — 94 — 94 — 94 — 94
94 — 94

Ainsi donc le tassement à pression constante rapproche l'une de l'autre les valeurs de cisaillement instantané et de cisaillement avec reprises. Le tassement, tout comme les reprises, a pour effet d'augmenter l'enchevêtrement des grains en rapprochant le milieu de l'état schématique isotrope où la probabilité des plans de contact des grains est la même dans toutes les directions.

3. Il nous reste à examiner l'influence d'un dernier facteur :

L'*humidité* : A cet effet, nous avons essayé des mélanges de sable et d'eau avec des degrés d'humidité variables.

a. *Sable sec.* — Coefficient d'humidité nul.

Cisaillements instantanés :

Pressions : 100 — 200 — 300 — 400 — 300 — 200 — 100
Cisaillements : 20 — 30 — 50 — 68 — 54 — 49 — 40

Cisaillements avec reprises :

A 100^{kg} :

Cisaillements : 19 — 20 — 21 — 21,5 — 22 — 22,5
23 — 24 — 24 — 24 — 24,5 — 24,5 — 25 — 25,5 — 26
26 — 26 — 26 — 27,5 — 28 — 28 — 28 — 28,5 — 29
29 — 28,5 — 28 — 28,5 — 29 — 29 — 30 — 30 — 30
30 — 30 — 30 — 30 — 30 — 30 — 30 — 30
30 — 30

A 200^{kg} :

Cisaillements : 47 — 53 — 54 — 58 — 59 — 58 — 60 — 60
60 — 60 — 60 — 61 — 62 — 62 — 62 — 62 — 62 — 62
63 — 63 — 63 — 63 — 63,5 — 64 — 64 — 63 — 63 — 63 — 63
63 — 63 — 63 — 63 — 63

A 300^{kg} :

Cisaillements : 82 — 90 — 94 — 96 — 96 — 96 — 94 — 94
95 — 96 — 98 — 98 — 96 — 95 — 94 — 94 — 94 — 94

A 200^{kg} :

Cisaillements : 86 — 84 — 84 — 82 — 82 — 80 — 79 — 79
78 — 78 — 78 — 78 — 78 — 77 — 76 — 73 — 71 — 70 — 70
70 — 70 — 72 — 71 — 71 — 70 — 70 — 70 — 68 — 67 — 66
66 — 64 — 64 — 64 — 64 — 64 — 64 — 64 — 64 — 64

A 100^{kg} :

Cisaillements : 48 — 48 — 46 — 46 — 48 — 50 — 48 — 44
43 — 43 — 42 — 42 — 42 — 42 — 42 — 42 — 42 — 40 — 40
40 — 40 — 40 — 40 — 40 — 40 — 39 — 39 — 39 — 38 — 38
38 — 37 — 37 — 37 — 37 — 36 — 36 — 36 — 36 — 36 — 36
36 — 36 — 36

Nous n'avons pas pu opérer à une pression supérieure à 400^{kg},
car le sable sec fuyait par le joint.

Ces résultats sont traduits par les courbes de la figure 18.

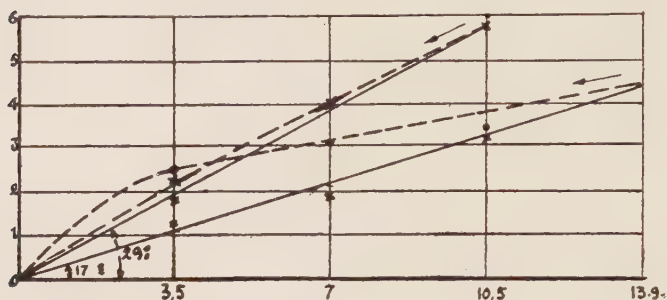


Fig. 18.

Elles font apparaître un angle φ de 17° pour les cisaillements instantanés et un angle de 29° pour les cisaillements avec reprises.

b. Sable mouillé à 5 pour 100. — Nous avons déjà trouvé un angle φ de $22^\circ 30'$ sans enchevêtrement et de 30° avec enchevêtrement.

c. Sable mouillé à 8 pour 100. — Cisaillements instantanés :

Pressions : 100 — 200 — 300 — 200 — 100

Cisaillements : 22 — 44 — 70 — 65 — 51

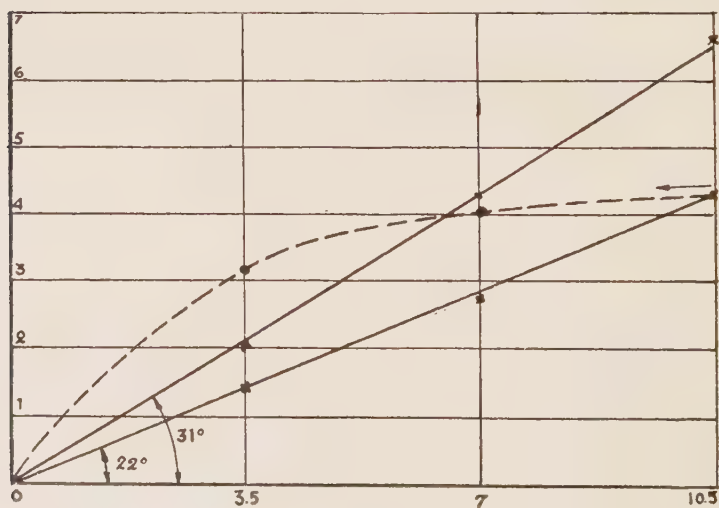


Fig. 19.

Cisaillements avec reprises :

A 100^{kg} :

25 — 26 — 27 — 33 — 34 — 34 — 33 — 34 — 34 — 33 — 33 — 33

Poids spécifique : 1,46

A 200^{kg} :

56 — 58 — 60 — 62 — 63 — 64 — 65 — 66 — 66 — 67 — 68

68 — 68 — 68 — 68 — 68

A 300^{kg} :

90 — 93 — 97 — 98 — 98 — 100 — 102 — 104 — 105

106 — 106 — 108 — 107 — 105 — 105 — 105 — 105 — 105

105 — 105

Ces résultats font apparaître un angle φ de 22° sans enchevêtrement et 31° avec enchevêtrement.

d. Sable mouillé à 16 pour 100. — Cisaillements instantanés.

Pressions.....	100	200	300
Cisaillements	16	28,5	64,5

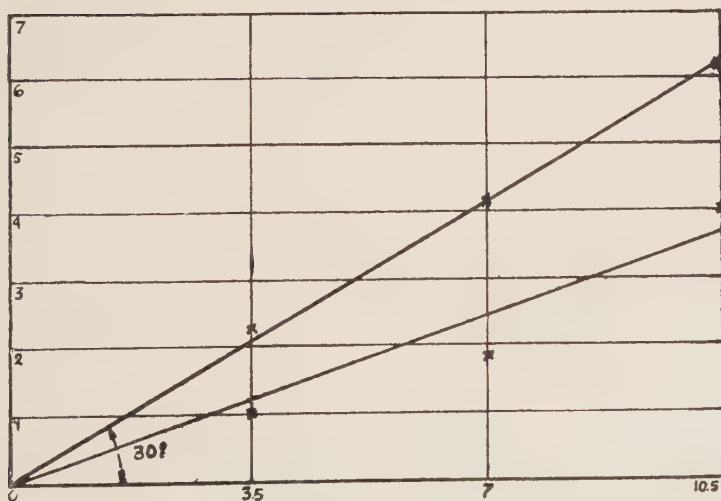


Fig. 20.

Cisaillements avec reprises :

A 100^{kg} :

26 — 33 — 34 — 34,5 — 36,5 — 36 — 36 — 36 — 36 — 36

A 200^{kg} :

69,5 — 68 — 66 — 65 — 65 — 66 — 65 — 66 — 67 — 68 — 67

67 — 67 — 67 — 66 — 67 — 66 — 68 — 69 — 68 — 68 — 67

67 — 67

A 300^{kg} :

91 — 94 — 96 — 97 — 98 — 98 — 98 — 98 — 98 — 98 — 98

98 — 98 — 98

On observe des pertes d'eau par le joint à 300^{kg}. Les cisaillements avec reprises font apparaître un angle de 30°.

e. Sable mouillé à 25 pour 100. — C'est le coefficient d'humidité le plus élevé que l'on puisse obtenir. Dès le début de l'expé-

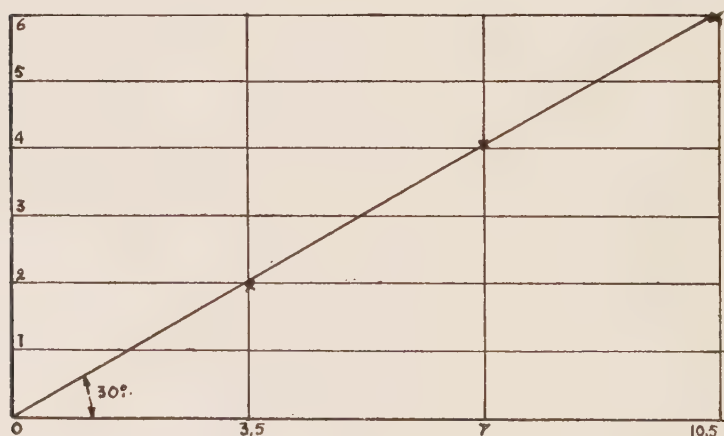


Fig. 21.

rience, on observe des fuites d'eau par le joint sous l'effet de la compression. Les cisaillements instantanés donnent, comme dans l'expérience précédente, des résultats assez irréguliers

Voici les résultats des cisaillements avec reprises :

A 100^{kg} :

16 — 22 — 24 — 26,5 — 29 — 29,5 — 30 — 30 — 31
 31,5 — 31,5 — 31,5 — 32 — 32 — 32 — 31,5 — 31,5 — 32
 32 — 32

Poids spécifique : 1,72

A 200^{kg} :

50 — 55 — 58 — 60 — 61 — 61 — 58 — 60 — 62 — 63 — 66
 65 — 64 — 64 — 64 — 65 — 66 — 66 — 66 — 66

A 300^{kg} :

82 — 90 — 93 — 95 — 96 — 96 — 97 — 98 — 97 — 97 — 97

La courbe intrinsèque fait apparaître un angle φ égal à 30°. Tous ces résultats sont résumés dans le tableau ci-après :

COEFFICIENT D'HUMIDITÉ pour 100.	ANGLE φ	
	sans enchevêtrement (en degrés).	avec enchevêtrement (en degrés).
0.....	17	29
5.....	22,30	30
8.....	22,10	31
16.....	—	30
25.....	—	30

L'humidité du milieu pulvérulent ne semble pas avoir une influence importante sur le coefficient de frottement avec enchevêtrement, le seul qui soit pratiquement défini ; les différences constatées sont de l'ordre des erreurs expérimentales. Cette conclusion est d'ailleurs conforme à celle d'expériences américaines récentes⁽¹⁾ dans lesquelles on comparait, sur modèle réduit, la poussée sur un mur de soutènement d'un remblai sec et d'un remblai humide.

Notre étude sur le sable de Nemours nous permet donc de dégager les résultats suivants :

⁽¹⁾ *Engineering News Record*, février 1934.

1° Le dispositif expérimental employé permet, par la répétition des cisaillements, de produire l'enchevêtrement des grains; dans ces conditions, l'angle de frottement φ croît jusqu'à une limite qui vérifie approximativement la relation $\tan \varphi = \frac{\pi}{2} \tan \psi$. On a donc amené la matière, au voisinage du plan de glissement, dans un état isotrope dans lequel il y a la même probabilité du plan de contact de deux grains dans toutes les directions. Dans cet état, la loi de Coulomb est vérifiée d'une façon très satisfaisante.

2° Le tassement produit le même effet que l'enchevêtrement par reprises successives.

3° L'humidité n'a pas d'influence sur l'angle de frottement avec enchevêtrement.

II. — EXPÉRIENCES SUR LE SABLE DE LOIRE.

Notre étude sur le sable de Nemours nous a permis de dégager quelques remarques sur l'enchevêtrement des grains, le tassement du milieu et son coefficient d'humidité mais elle n'a pu nous documenter sur cet autre facteur important qu'est la granulométrie du milieu pulvérulent. C'est dans ce but que nous avons procédé à une deuxième série d'expériences sur le sable de Loire, matériau très abondant à Orléans, qui se présente sous forme de grains ronds très réguliers. Il a été extrait du lit de la Loire par drague suçeuse et calibré très soigneusement en plusieurs catégories :

Sable calibré n° 0 de dimensions inférieures à 1^{mm}

Sable calibré n° 1 de dimensions comprises entre 1 et 2^{mm}

»	n° 2	»	2 et 3
»	n° 3	»	3 et 4
»	n° 4	»	4 et 5

Nous décrirons en détail nos expériences sur le sable calibré n° 4 puis nous donnerons le résumé des autres expériences.

Indiquons déjà qu'au cours de toutes celles-ci, nous avons constaté du broyage principalement pour les sables calibrés de grosses dimensions. Notre but étant la détermination de la courbe intrinsèque correspondant à un matériau intact, nous avons avant la détermination de chaque point vidangé l'appareil et

rempli celui-ci d'un mélange vierge. Cette courbe intrinsèque est nettement distincte, à partir de $5\text{kg}/\text{cm}^2$ de pression normale de

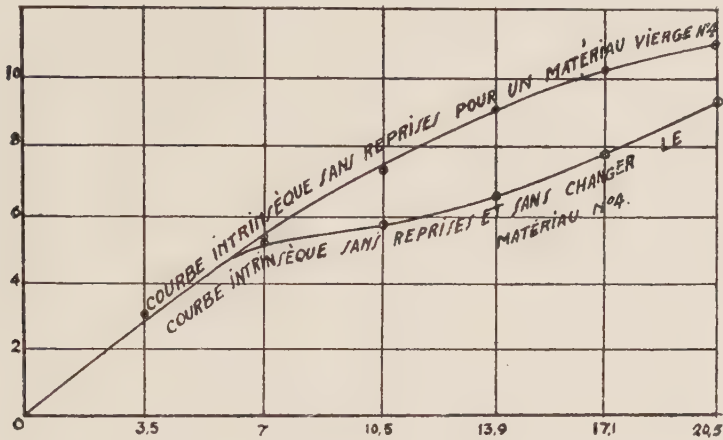


Fig. 22.

la courbe qui est déterminée entièrement avec le même milieu comme le montre la figure 22.

Sable calibré n° 4 (passant à l'anneau de 5^{mm} mais ne passant pas dans celui de 4^{mm}).

A 50^{kg} :

Cisaillement instantané : 24^{kg} .

Cisaillements avec reprises : $24 - 24 - 24 - 24 - 23,5$
 $24 - 24 - 24 - 24 - 24$

A 100^{kg} :

Cisaillement instantané : 49^{kg} après avoir observé 53^{kg} pendant la course du levier. On observe ici une très nette augmentation de volume et pour maintenir constante la pression de 100^{kg} , on doit desserrer la vis à quatre bras.

Cisaillements avec reprises : $47,5 - 46 - 46 - 45 - 45$
 $45 - 44 - 44 - 44 - 44 - 45 - 46 - 46 - 44 - 42 - 42$
 $44 - 45 - 44 - 45 - 46 - 45 - 45 - 45 - 45 - 45$

On observe donc déjà deux différences très importantes avec le sable de Nemours : il y a dilatation au cours du cisaillement

instantané et de plus la valeur limite du cisaillement avec reprises est inférieure au cisaillement instantané.

Les grains sont enchevêtrés dès le début de l'expérience; mais ils sont environ 40 fois plus gros que ceux du sable de Nemours. Aussi, pendant le premier cisaillement, pour que les grains puissent rouler les uns sur les autres (en admettant qu'il n'y ait pas de broyage), il faut qu'il y ait une dilatation parallèle à l'axe de rotation de l'ordre de la grosseur des grains. Ce phénomène restait inaperçu avec le sable de Nemours à cause de la finesse des grains. Il s'atténue d'ailleurs lorsqu'on passe de 50^{kg} à 100^{kg}. A 50^{kg}, il n'y avait aucun broyage tandis qu'à 100^{kg} (3,5 kg/cm² de pression réelle) on commence à observer un très léger broyage qu'on met facilement en évidence en repassant le sable essayé au tamis de 4^{mm}. C'est ce léger broyage qui détermine une limite de cisaillement avec reprises un peu inférieure au cisaillement instantané.

Par la suite, à des pressions supérieures, le broyage s'accroît en donnant dans le plan de glissement un mélange à grande compacité, les déchets de broyage comblant les vides du milieu primitif qui sont de l'ordre de 40 pour 100) et la limite de cisaillement avec reprises sera plus grande que le cisaillement instantané.

La limite de ces deux phases coïncide bien avec la zone de séparation des deux courbes de la figure 22. Elle marque le commencement effectif du broyage des grains.

A 200^{kg} :

Cisaillement instantané : 78^{kg}.

Cisaillements avec reprises : 78 — 78 — 78 — 77 — 78
 80 — 82 — 79 — 77 — 76 — 78 — 78 — 78 — 79 — 80 — 82
 78 — 77 — 77 — 78 — 80 — 80 — 82 — 82 — 81 — 82 — 82
 80 — 80 — 80 — 81 — 79 — 80 — 81 — 82 — 82 — 82 — 82
 82 — 86 — 83 — 82 — 82 — 83 — 87 — 84 — 82 — 81 — 82
 89 — 80 — 82 — 83 — 84 — 87 — 86 — 85 — 86 — 87 — 85
 85 — 84 — 86 — 86 — 86 — 85 — 84 — 86 — 87 — 87 — 84
 84 — 85 — 86
 88 — 93 — 93 — 90 — 86 — 84 — 84 — 84 — 84 — 84 — 89
 88 — 88 — 88 — 90 — 90 — 89 — 90 — 90 — 90 — 90 — 91
 91 — 91 — 91

Laissons la machine en charge pendant 72^h. En reprenant l'expérience, on note les valeurs suivantes :

97 — 99,5 — 99 — 100 — 98 — 96 — 94 — 94 — 94 — 96 — 97
94 — 94 — 94 — 92 — 94 — 92 — 92 — 92 — 92

Nous prendrons 91^{kg} comme limite.

A 300^{kg} :

Cisaillement instantané : 118^{kg}
Cisaillements avec reprises : 120 — 120 — 118 — 120 — 122
122 — 125 — 125 — 125 — 128 — 128 — 125 — 128 — 128
128 — 128 — 130 — 130 — 130 — 128 — 122 — 122 — 125
128 — 128 — 128 — 125 — 130 — 125 — 125 — 128 — 130
130 — 130

A 400^{kg} :

Cisaillement instantané : 145^{kg}
Cisaillements avec reprises : 150 — 158 — 155 — 168
170 — 170 — 170 — 172 — 170 — 175 — 172 — 180 — 175
178 — 178 — 178 — 178 — 178

A 500^{kg} :

Cisaillement instantané : 164^{kg}
Cisaillements avec reprises : 212 — 220 — 225 — 200
225 — 225 — 225 — 230 — 230 — 238 — 235 — 230 — 230
230 — 230

A 600^{kg} :

Cisaillement instantané : 164^{kg}
Cisaillements avec reprises : 260 — 260 — 270 — 270
270 270 — 270

Ces résultats sont résumés par le tableau ci-après et par la figure 23. Nous avons représenté sur cette figure quelques courbes de retour à partir des cisaillements sans reprise.

PRESSIONS.		CISAILLEMENTS.			
Lecture du manomètre	En kg/cm ² .	SANS REPRISE.		AVEC REPRISES.	
		Lecture du manomètre.	En kg/cm ² .	Lecture du manomètre.	En kg/cm ² .
50	1,75	24	1,5	24	1,5
100	3,5	49	3,06	45	2,81
200	7	78	4,88	91	5,7
300	10,5	118	7,4	130	8,15
400	13,9	145	9,05	178	11,15
500	17,1	164	10,20	230	14,40
600	20,25	175	10,90	270	16,90

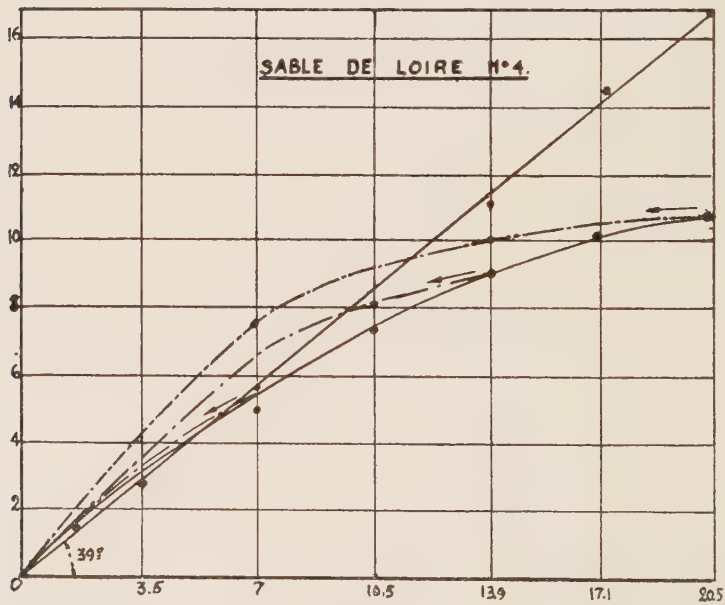


Fig. 23.

Sable de Loire n°2 (passant à l'anneau de 3^{mm} mais ne passant pas à l'anneau de 2^{mm}) :

PRESSIONS RÉELLES.	CISAILLEMENTS	
	instantanés.	avec reprises.
3,5.....	2,75	2,65
7.....	4,7	5,35
13,9.....	6,9	10,6
20,5.....	8,95	15,7

Les courbes de la figure 24 traduisent ces résultats. Les cisaillements avec reprises donnent un angle de $37^{\circ}30'$ contre 39° pour le sable n° 4.

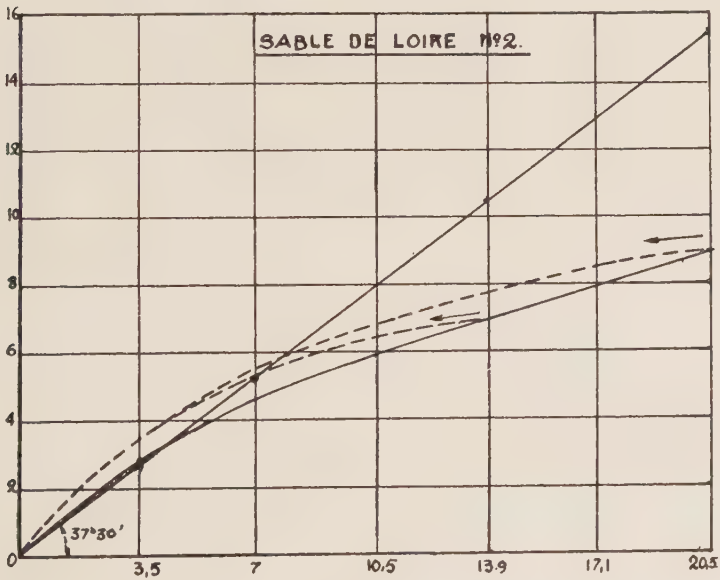


Fig. 24.

Sable n° 1 (passant au tamis de 2^{mm} mais ne passant pas à celui de 1^{mm}) :

PRESSIONS réelles.	CISAILLEMENTS	
	sans reprise.	avec reprises.
3,50.....	3,06	2,55
7.....	5,3	4,90
13,0.....	7,8	10
20,5.....	10,3	15

Les cisaillements avec reprises donnent un angle de 36° .

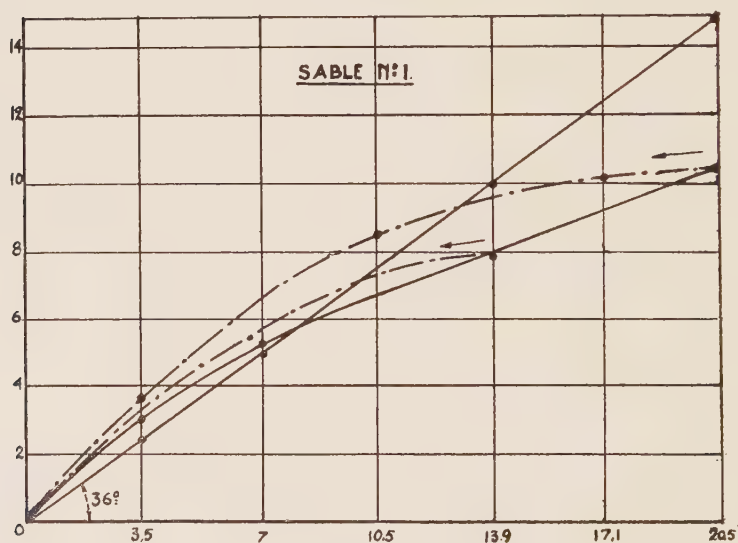


Fig. 25.

Sable n° 0 (grains inférieurs à 1^{mm}). — Nous n'avons pas pu pousser la pression au-dessus de 7 kg/cm^2 par suite de fuite au joint.

Cet inconvénient a pu altérer nos premières mesures qui sont les suivantes :

PRESSIONS réelles.	CISAILLEMENTS	
	sans reprise.	avec reprises.
3,5.....	1,72	2,55
7.....	4,11	5,05

Les cisaillements avec reprises conduisent à un angle de 36°. On remarquera que les cisaillements sans reprise ont des valeurs très faibles. On retrouve l'allure générale des expériences sur le sable de Nemours.

Sable composé. — Nous avons enfin composé un mélange formé de

Sable n° 4.....	6	volumes
Sable n° 1.....	2,5	»
Sable n° 0.....	1,5	»

Ce mélange présente une grande compacité, le sable n° 0 comblant approximativement les vides du sable n° 1 qui lui-même remplit les 40 pour 100 de vides du sable n° 4.

PRESSIONS réelles.	CISAILLEMENTS	
	sans reprise.	avec reprises.
3,5.....	2,25	2,63
7.....	3,75	5,3
13,9.....	6,85	10,55
20,5.....	9,35	15,6

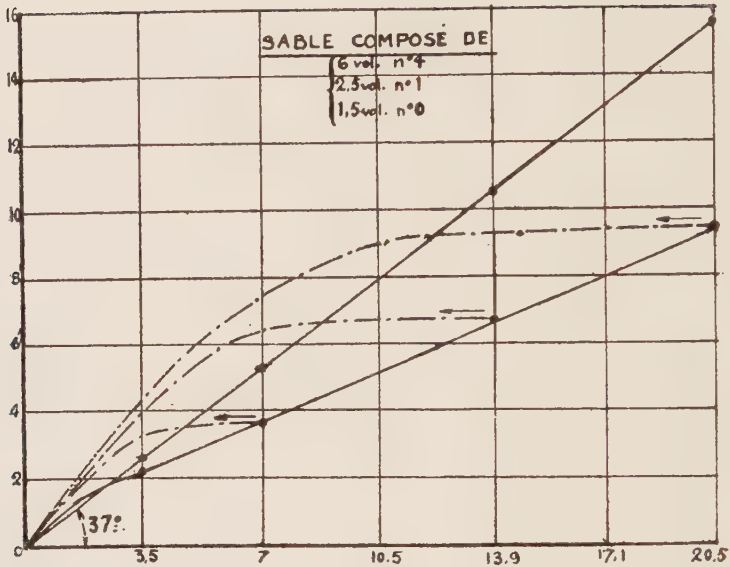


Fig. 26.

Les cisaillements avec reprises donnent un angle de 37° . On remarquera la forme rectiligne de la courbe intrinsèque sans reprise à partir de $3,5 \text{ kg/cm}^2$ de pression réelle et la forme des courbes de retour très plates au départ.

Résumons ces expériences sur le sable de Loire. Comme pour le sable de Nemours les seules mesures vraiment constantes que l'on puisse faire sont les mesures de cisaillements avec reprises. Les valeurs de cisaillements sans reprise qui ont été inscrites étaient déduites de moyennes et nous avons noté des valeurs différant très largement de celles-ci. Il convient donc de les accueillir avec réserve et de retenir surtout les résultats des cisaillements avec reprises et la forme générale des courbes présentées.

La loi de Coulomb est vérifiée d'une façon satisfaisante pour les cisaillements avec reprises. Les angles de frottement trouvés ont été :

Pour le mélange composé.....	37°
Pour le sable n° 0.....	36°
» n° 1.....	36°
» n° 2.....	$37^\circ 30'$
» n° 4.....	39°

L'angle φ varie entre d'étroites limites et il semble même qu'il diminue avec la grosseur des grains.

La forme des courbes intrinsèques pour les cisaillements instantanés, ou plutôt sans reprise, est concave vers l'axe des pressions. En réalité, ce ne sont pas des mesures instantanées et, pour observer une position stable de l'aiguille du manomètre de cisaillement, il faut provoquer une certaine rotation de la roue à rochet en utilisant une grande partie de la course du levier. Bien qu'on opère pour chaque point sur un matériau vierge, la mesure du cisaillement sans reprise peut déjà être entachée d'erreur par suite de broyage. Cette erreur augmente au fur et à mesure qu'on opère à haute pression. Ceci explique que la relation linéaire $T = N \tan \varphi$ ne soit pas vérifiée.

Les courbes de retour surtout pour le mélange composé ont une inclinaison très faible au départ. Il s'ensuit que si dans un massif pulvérulent il se produit une faible décompression, ce milieu, qui présentera les caractéristiques physiques données par la tangente à la courbe de retour, se comportera d'abord comme un milieu à grande cohérence et à très faible angle de frottement.

Toute la théorie des murs de soutènement a été faite en raisonnant sur un angle φ constant. Dans ces conditions, on démontre que la poussée sur le mur, varie entre deux limites supérieure et inférieure. Les murs sont calculés pour résister à la limite inférieure car on admet que c'est celle-ci qui se réalise automatiquement : au début, en effet, il est vraisemblable que c'est une pression intermédiaire qui règne sur le mur ; par suite d'un léger mouvement du mur ou de son élasticité propre il y a décompression et c'est l'équilibre inférieur de Boussinesq qui s'établit. Nous voyons de plus que cette décompression, si elle existe, ne peut qu'augmenter la stabilité de l'ouvrage puisque, au début de la décompression, le milieu se comporte comme un milieu cohérent à angle de frottement très faible. C'est ce qui explique qu'on observe des décollements entre les murs de soutènements et leurs remblais pulvérulents surtout lorsque ceux-ci sont compacts et tassés.

III. — EXPÉRIENCES SUR LES MATÉRIAUX DE BROUAGE.

Les expériences précédentes portaient sur des milieux pulvérulents qu'on rencontre à l'état naturel dans la nature : le sable de Nemours qui provient de la sédimentation et de la décomposition des grès, le sable de Loire qu'est un produit d'érosion superficiel.

Il nous restait à étudier un autre type de milieu pulvérulent : le milieu pulvérulent artificiel produit par concassage industriel de roches naturelles.

L'exploitation des carrières produit à l'heure actuelle (pour les applications routières notamment) toute une gamme de matériaux variant depuis le sable (inférieur à 1^{mm}) jusqu'au gravillon (inférieur à 15^{mm}) et au macadam (inférieur à 70^{mm}).

Nous avons procédé à un très grand nombre d'essais sur des milieux de toutes dimensions et de toute provenance géologique (granit porphyroïde de Surpaillis, calcaire de Prasville, silex de la Taye, porphyre de Voutré, grès quartzitique, trapp des Vosges, etc.),

Les résultats obtenus nous ont paru au premier abord très complexes. Nous n'arrivons plus à trouver de valeur limite bien déterminée pour les cisaillements avec reprises. De plus, aux faibles pressions, les cisaillements instantanés étaient dans un rapport très variable avec les cisaillements avec reprises.

Voici les résultats d'expériences sur des matériaux non calibrés entre d'étroites limites :

Porphyres de Voutré (de 5^{mm} à 15^{mm}).

A 100^{kg} :

Cisaillement instantané : 72^{kg} .

Cisaillements avec reprises : 66 — 68 — 68 — 64 — 64

60 — 54 — 52 — 52 — 60 — 57 — 48 — 42 — 39 — 38 — 48

50 — 54 — 54 — 50 — 51 — 48 — 50 — 50 — 54 — 51 — 50

44 — 49 — 40 — 40 — 48 — 49 — 50 — 52 — 52 — 55 — 52

58 — 56 — 57 — 60 — 53 — 50 — 55

En continuant les reprises on n'arrive pas à trouver de limite. On remarquera que la valeur instantanée conduirait à un angle φ de 50° .

Granit porphyroïde de Surpaillis (de 5mm à 15mm).

A 100^{kg} :

Cisaillement instantané : 50^{kg}.

Cisaillements avec reprises : 56 — 59 — 60 — 60 — 63

66 — 64 — 62 — 62 — 60 — 58 — 58 — 59 — 58 — 56 — 57

55 — 58 — 56 — 54 — 56 — 58 — 60 — 58 — 56 — 48 — 46

50 — 45 — 44 — 49

On ne constate aucune variation régulière dans les cisaillements avec reprises.

Silex de la Taye (de 5mm à 15mm).

A 100^{kg} :

Cisaillement instantané : 62^{kg}.

Cisaillements avec reprises : 65 — 67 — 67 — 68 — 65

62 — 55 — 57 — 54 — 52 — 53 — 52 — 49 — 50 — 49 — 47

50 — 49 — 52 — 50 — 52 — 48 — 50 — 53 — 51 — 47 — 48

48 — 52 — 51 — 53 — 49 — 47 — 48

Les résultats apparaissent complexes également aux autres pressions. La loi de Coulomb ne semble plus vérifiée.

L'explication nous paraît simple; c'est la trop grande dimension des matériaux par rapport à la surface du contact des deux coquilles qui masque la relation $T = N \tan \varphi$.

Cette surface de contact est celle d'une couronne limitée par deux cercles de diamètres égaux à 17^{cm} et 25^{cm}. Les dimensions des grains sur lesquels nous expérimentons sont de l'ordre du quart de la différence des rayons de cette couronne. On ne peut plus observer de phénomènes statistiques. Les matériaux sont trop gros ou la machine trop petite.

Abandonnant la solution qui aurait consisté à augmenter les dimensions de celle-ci, nous avons préféré demander aux exploitations de carrières de nous fournir des matériaux fins rigoureusement calibrés entre 1^{mm} et 2^{mm}. Dans ces conditions, la loi de Coulomb est vérifiée d'une façon très remarquable.

En voici un exemple caractéristique :

Grès quartzitique de la carrière de Perrières par Jort (Calvados).
(Gravillon calibré entre 1^{mm} et 2^{mm}.)

A 100^{kg} :

Cisaillement instantané : 25^{kg}.

Cisaillements avec reprises : 28 — 30 — 33 — 35 — 36
37 — 38 — 38 — 38 — 39 — 39 — 40 — 40 — 40 — 41 — 41
41 — 41 — 41 — 41 — 41 — 42 — 42 — 43 — 43 — 43 — 42
42 — 42 — 42 — 42 — 42 — 43 — 43 — 43 — 43 — 43 — 43
43 — 43 — 43 — 43 — 43 — 43

A 200^{kg} :

Cisaillement instantané : 155^{kg}.

Cisaillements avec reprises : 54 — 57 — 60 — 64 — 66
68 — 70 — 70 — 71 — 72 — 74 — 74 — 74 — 74 — 75 — 76
76 — 76 — 78 — 78 — 80 — 79 — 80 — 81 — 82 — 83 — 82
82 — 82 — 83 — 82 — 82 — 83 — 83 — 84 — 84 — 84 — 84
84 — 85 — 86 — 85 — 85 — 86 — 86 — 86 — 86 — 86 — 86
86 — 86 — 86

A 600^{kg} :

Cisaillement instantané : 155^{kg}.

Cisaillements avec reprises : 170 — 178 — 185 — 191
195 — 200 — 205 — 210 — 215 — 218 — 220 — 225 — 230
235 — 238 — 235 — 238 — 239 — 240 — 252 — 252 — 251
251 — 251 — 251

On observe donc pour les reprises une croissance régulière avec une limite bien définie. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-après :

PRESSIONS réelles.	CISAILLEMENTS		RAPPORT des cisaillements.
	avec reprises.	instantanés.	
3,5	2,68	1,56	1,71
7	5,36	3,12	1,71
20,5	15,66	9,67	1,62

Notons que le rapport des cisaillements avec reprises aux cisaillements instantanés pour une même pression n'est pas très éloigné de $1,57 = \frac{\pi}{2}$.

Les rapports des cisaillements avec reprises aux pressions sont $0,765 - 0,765 - 0,762$ valeurs qui correspondent à un angle φ de $37^{\circ}20'$. La loi de Coulomb est donc exactement vérifiée.

Les rapports des cisaillements instantanés aux pressions sont $0,445 - 0,445 - 0,46$ correspondant à un angle compris entre 24 et 25° .

Nous sommes arrivé aux mêmes résultats généraux pour des milieux calibrés entre 1 et 2^{mm} , de provenance géologique très différente. Nous signalons toutefois que certains matériaux comme le trapp des Vosges qui présente des plans de schistosité (gravillon en plaquettes) nous ont conduit à des frottements plus forts aux faibles pressions (inférieur à 5 kg/cm^2). Au-dessus de 5 kg/cm^2 la loi de Coulomb reste parfaitement vérifiée. Le rapport des cisaillements avec reprises aux cisaillements sans reprise est de l'ordre de $1,70$ aux faibles pressions et de l'ordre de $1,50$ aux hautes pressions. Il est toujours assez voisin de $\frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE IV.

CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE SUR LE FROTTEMENT DES MILIEUX PULVÉRULENTS.

Il faut distinguer deux coefficients de frottement : le frottement physique $\tan\psi$, qui est celui du corps solide de même nature que les grains au milieu pulvérulent, et le frottement apparent $\tan\varphi$ qui est défini comme étant le rapport des contraintes de cisaillement et de pression s'exerçant sur un élément du milieu.

Ce rapport semble être, dans certaines conditions, indépendant de la pression dans le domaine des pressions où nous avons opéré (0 à 20 kg/cm²).

Il paraît être indépendant de l'humidité du milieu. Il varie peu avec la granulométrie du milieu, quand on opère convenablement en observant les contraintes N et T sur une surface de glissement très grande par rapport à la dimension des grains

Deux facteurs importants influent sur le frottement apparent : le tassement et l'enchevêtrement : ces facteurs ne sont pas indépendants, tout tassement produisant un enchevêtrement.

Le frottement apparent varie dans une proportion voisine de $\frac{\pi}{2}$ à 1 suivant que le milieu est enchevêtré ou non, tassé ou non.

C'est cette même proportion qui mesure approximativement le rapport du coefficient de frottement apparent d'un milieu enchevêtré isotrope à son coefficient de frottement physique.

Enfin les milieux pulvérulents présentent des phénomènes d'hystérésis nettement caractérisés.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉSISTANCE DES FONDATIONS EN MILIEUX PULVÉRULENTS.

CHAPITRE V.

ÉTAT ACTUEL DE LA QUESTION.

Parmi toutes les questions qui se posent à l'ingénieur à propos de la construction d'un ouvrage d'art, la question des fondations est l'une des plus importantes puisque d'une part, c'est la résistance de celles-ci qui conditionne le stabilité de l'ouvrage et que d'autre part, leur coût constitue une fraction très importante du prix total de l'ouvrage.

Cette question est cependant toujours restée du domaine de l'empirisme. La complexité des phénomènes entrant en jeu, notamment dans le cas des sols cohérents, semblait en effet rendre très difficile sinon impossible une investigation scientifique.

Rappelons brièvement quelques procédés actuellement en usage pour déterminer la résistance des fondations,

On exécute une fouille, on prélève des échantillons des terrains traversés et selon leur aspect, et en général sans essai mécanique, on leur donne un nom et l'on admet qu'ils pourront résister à une certaine charge, compte tenu de ce que dans des cas semblables des sols analogues ont donné des résultats satisfaisants.

On conçoit de suite les lacunes d'un tel procédé. Des échantillons géologiquement identiques possèdent souvent des résistances très variables en raison de la grosseur, de la forme des grains et de divers facteurs physiques. Enfin l'observation ci-dessus est purement subjective et tel échantillon baptisé par l'un, marne se trouve appelé par l'autre, argile.

Un autre procédé à tendance moins empirique consiste après avoir exécuté une fouille à mesurer directement la résistance du fond de la fouille au moyen d'une presse. Du diagramme des enfoncements en fonction des pressions, on déduit une charge limite.

Comme nous le montrons par la suite, cet essai au fond d'une fouille est absolument équivalent à un essai à la surface c'est-à-dire à un essai de dureté superficielle, pour peu que la largeur de la fouille soit grande par rapport à la surface d'appui de la presse. Or, la résistance des fondations croît linéairement avec la profondeur du massif et il en résulte que, pour les massifs profonds, les résultats de l'essai n'ont aucun rapport avec la résistance que donneront les fondations. Au surplus ces essais sont souvent très délicats sinon impossibles à exécuter au fond d'une fouille du fait que celle-ci est noyée. C'est pourquoi on a l'habitude de majorer d'un coefficient de sécurité variable, mais très souvent de l'ordre de 7, les résultats déduits de l'expérimentation précédente.

Enfin un dernier procédé consiste à forer au trépan et à déduire la résistance du sol du nombre de coups nécessaires pour réaliser un certain enfoncement. Cette méthode ne peut donner qu'un ordre de grandeur, sujet à caution, la résistance au choc étant souvent sans rapport avec la résistance à la compression.

Depuis quelques années l'étude expérimentale des fondations est à l'ordre du jour.

Les Autrichiens sous l'impulsion du professeur Tersaghi ont construit à Vienne un vaste laboratoire d'études des fondations. L'objet de leurs recherches est la connaissance systématique des facteurs physiques qui influent sur les propriétés d'un sol de fondation pulvérulent ou cohérent notamment la compressibilité, la pression capillaire et la porosité.

De semblables études expérimentales ont été entreprises en Hollande à l'université de Delft, en Amérique et en France récemment au bureau *Securitas* et *Veritas*.

Notons d'ailleurs que ces recherches se développent principalement dans les pays où les fondations sont particulièrement difficiles : on sait en effet qu'en certains points de la Vallée du Danube

près de Vienne les constructions reposent sur une couche d'argile de 600^m de hauteur.

Peut-on au moyen de la connaissance du coefficient de frottement et de la cohésion C trouver une formule exprimant la résistance des fondations ?

Divers auteurs se sont posé ce problème. A notre connaissance, il existait, jusqu'à ces dernières années, quatre formules exprimant la pression maximum p que peut supporter sans glissement une fondation, en fonction de la profondeur h de la fondation, du poids spécifique ϖ et de l'angle φ de frottement apparent du milieu pulvérulent.

La formule de Rankine s'écrit

$$p = \varpi h \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Rankine l'appliquait aux milieux cohérents et tenait compte de la cohérence par une majoration de l'angle φ .

La formule de Wierendel (1) s'écrit

$$p = \varpi h \left\{ 1 + \frac{h}{R} \tan \varphi \left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{6} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\}.$$

Elle est issue de considérations sur le refoulement latéral des fondations. R représente le rayon moyen de la fondation (au sens hydraulique).

La formule de Jankowski (2) est

$$p = 2 \varpi h \left(\frac{1 + \sqrt{2} \sin \varphi}{1 - \sqrt{2} \sin \varphi} \right)^2.$$

Enfin la formule de M. Pigeaud (3) est

$$p = \varpi h \frac{\cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi}{\cos \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin \varphi}.$$

(1) WIERENDEL, *Stabilité des constructions*, V, 1928, p. 213.

(2) HUTTE, II, p. 50.

(3) PIGEAUD, *Annales des Ponts et Chaussées*, 1922, p. 179.

Nos résultats expérimentaux nous montreront qu'aucune de ces formules n'est satisfaisante.

Très récemment dans son étude sur les massifs à frottement interne, M. Caquot a donné, à titre d'application de sa théorie générale sur les massifs à frottement, les formules suivantes :

$$p = \varpi h \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi}$$

pour les milieux pulvérulents, et

$$p = \varpi h \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi} + C \cot^2 \varphi (e^{\pi \tan \varphi} - 1)$$

pour les milieux cohérents.

Nous nous sommes proposé, dans cette deuxième partie, de faire :

- 1° Un exposé d'ensemble du problème des fondations en rappelant les éléments de la démonstration de la formule ci-dessus ;
 - 2° Une vérification expérimentale de cette formule, φ étant déterminé par nos expériences précédentes.
-

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES FONDATIONS.

Considérons un massif de fondation en milieu pulvérulent reposant sur celui-ci par une surface plane AB (*fig. 27*).

Soit H le plan horizontal passant par AB, h sa distance à la surface libre du milieu supposée horizontale.

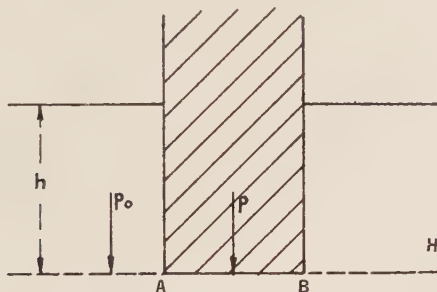


Fig. 27.

Sur un élément de surface du plan H prolongé dans le milieu agit une pression $p_0 = \varpi h$, ϖ étant le poids spécifique du milieu.

Soit p la pression exercée par le massif de fondation.

Le problème des fondations revient à chercher la relation limite qu'existe entre p et p_0 lorsque le rapport $\frac{p}{p_0}$ est le plus grand possible.

Pour résoudre ce problème, M. Caquot le scinde en deux parties :

1° On suppose d'abord que le milieu pulvérulent au-dessous

de H n'est pas pesant et l'on étudie le problème de la transmission des contraintes p et p_0 à travers ce milieu.

A l'inverse du cas des milieux pesants, l'équilibre limite de ce problème est intégrable.

2° Le massif pulvérulent au-dessous de H est supposé pesant et la pression p_0 nulle. C'est le problème de la butée d'un massif pesant (1).

Le premier problème donne le terme principal de la formule des fondations et il a conduit M. Caquot à la formule

$$p = p_0 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi \varphi}.$$

Nous en rappelons plus loin la démonstration.

Le second problème donne un terme correctif proportionnel à la surface AB de la fondation. Nous en calculerons l'ordre de grandeur.

C'est en partant de la notion très féconde de courbe intrinsèque que M. Caquot a déduit sa formule (2).

Cette notion est éclairée par la représentation de Mohr.

Rappelons d'abord quelques résultats de la représentation de Mohr.

Représentation de Mohr. — Soit AB un élément de surface passant par un point quelconque O d'un corps quelconque (fig. 28). Sur cet élément agit une contrainte OC. Soit OX la normale à l'élément AB, OY, la trace sur le plan de l'élément AB du plan normal OCX. Mohr supposant un observateur invariablement lié à ce plan XOY, cherche le domaine de ce plan décrit par le

(1) Il est légitime de cumuler les solutions de ces deux problèmes; car le système résultant de la somme géométrique de deux équilibres limites est en général surabondant. Il n'est limite que dans le cas où les contraintes principales des deux systèmes sont parallèles en tout point correspondant. On le voit facilement à partir de la courbe intrinsèque et des cercles de Mohr.

(2) Cette notion de courbe intrinsèque aujourd'hui assez courante a été exposée pour la première fois dans la *Revue du Génie Civil*. Numéro du Cinquantenaire, novembre 1930, p. 189.

point C, lorsqu'on fait varier de toutes les manières possibles l'orientation de l'élément AB autour du point O.

Mohr a montré que ce domaine est limité par un cercle. Ce cercle a pour points diamétraux les extrémités N_1 et N_3 des vecteurs $\overrightarrow{ON_1}$ et $\overrightarrow{ON_3}$, portés sur la normale OX et ayant pour grandeurs les contraintes principales extrêmes N_1 et N_3 .

Les contraintes dangereuses sont donc les contraintes telles que OC, joignant le point O à un point quelconque du cercle de Mohr. A quelles orientations de l'élément AB correspondent-elles ?

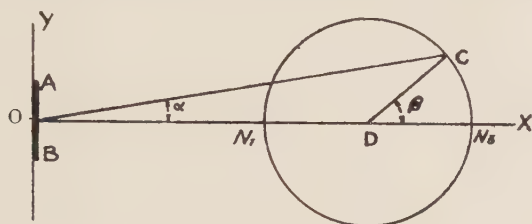


Fig. 28.

On démontre qu'elles sont appliquées aux éléments du solide passant par $\overrightarrow{ON_2}$, contrainte principale intermédiaire⁽¹⁾; on montre également que l'angle $\widehat{CDN_3} = \beta$ est le double de l'angle que fait dans le corps l'élément AB sur lequel agit la contrainte OC, avec le plan principal N_2ON_3 .

On vérifie en particulier que le point C se confond avec le point N_1 pour $\beta = 180^\circ$ qui est bien le double de l'angle que fait dans le corps le plan principal N_1ON_2 avec le plan principal N_3ON_2 .

En résumé la position du point C sur la circonférence définit la grandeur OC du vecteur contrainte $\overrightarrow{OC}$, son obliquité α et la position dans l'espace de l'élément de surface sur lequel il agit par l'angle $\frac{\beta}{2}$.

(¹) On montre également que les extrémités des contraintes agissant sur les éléments plans dont les normales sont sur un cône de révolution d'axe ON_2 décrivent un arc de cercle concentrique au cercle de Mohr.

Courbe intrinsèque de résistance élastique. — Supposons qu'en un point O du corps, nous sortions du domaine élastique. Il va se produire en ce point un glissement. Soit AB l'élément de surface passant par le point O suivant lequel il se produit. La contrainte OC correspondant à cet élément est définie par son obliquité α et par sa grandeur OC au moment où la déformation permanente commence.

Pour d'autres sollicitations par des systèmes de forces extérieures différents, j'aurai d'autres valeurs associées de α et de OC.

Le lieu géométrique correspondant de C dans le plan de représentation de Mohr est une courbe symétrique par rapport à OX puisque le milieu est isotrope. C'est cette courbe qu'on appelle *courbe intrinsèque du matériau dans les conditions de température des expériences*.

Soit QPR (fig. 29) cette courbe intrinsèque; elle définit le

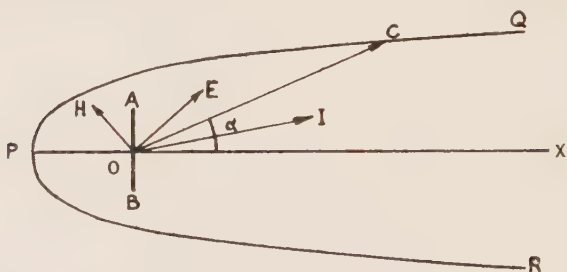


Fig. 29.

domaine dans lequel doivent se trouver les contraintes OE, OH, OI pour que le solide ne subisse pas de déformations permanentes.

Dès qu'une seule contrainte, telle que OC atteint la courbe intrinsèque, un glissement va se produire suivant le plan de l'élément correspondant dans l'espace. Or, dans toute expérience physique, on produit en chaque point une double infinité de contraintes dont les plus dangereuses s'appuient sur le cercle de Mohr relatif à ce point; les contraintes devant être dans le domaine intérieur de la courbe intrinsèque, les cercles de Mohr doivent aussi rester dans ce domaine et à la limite seulement s'appuyer sur la courbe intrinsèque. Celle-ci est donc l'enveloppe des cercles de Mohr des systèmes réalisés en chaque point qu'atteint la déformation permanente au moment où celle-ci commence.

Dans le cas des milieux pulvérulents, en particulier, la courbe intrinsèque est formée de deux droites faisant l'angle φ avec la

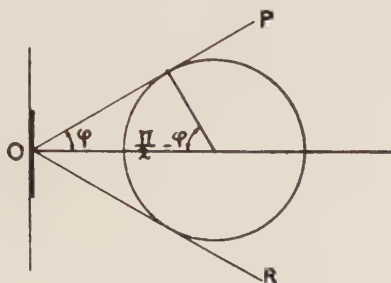


Fig. 30.

normale à l'élément (*fig.* 30). Les plans de glissement font donc entre eux l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Le problème fondamental de la poussée des terres. — Le problème fondamental de la poussée des terres, auquel se sont attachés les noms de Rankine, Lévy, Considère, Boussinesq et Résal est celui de la recherche des équilibres limites d'un milieu pulvérulent pesant indéfini limité par un mur plan.

Supposons, pour fixer les idées, le mur vertical, et la surface

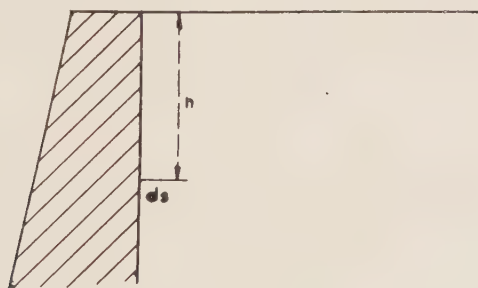


Fig. 31.

libre du milieu horizontale ⁽¹⁾ (*fig.* 31). Dans le problème du soutènement, on se propose la recherche de l'équilibre limite

⁽¹⁾ Nous prenons comme plan de figure un plan vertical normal au mur. Le massif est supposé indéfini en avant et en arrière de ce plan. Tous les problèmes sont ramenés au cas de l'élasticité plane.

donnant le minimum de poussée sur le mur. Dans le problème de butée, au contraire, on se propose la recherche de l'équilibre limite donnant le maximum de poussée sur le mur.

L'idée la plus naturelle qui se présente à l'esprit est de supposer que les contraintes se reproduisent identiques à elles-mêmes dans toute translation parallèle à la surface (hypothèse de Rankine-

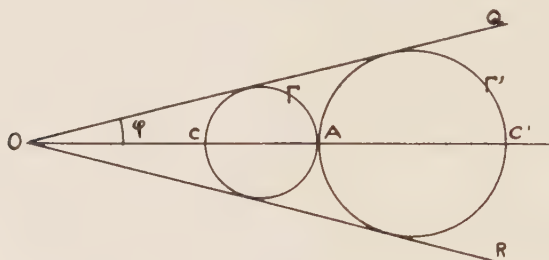


Fig. 32.

Lévy-Considère). Dans ces conditions, les contraintes principales sont parallèles et perpendiculaires à la surface. La contrainte principale s'exerçant sur un élément plan passant par un point quelconque à la profondeur h est égale à $p = \varpi h$. Elle est représentée par le vecteur OA (fig. 32).

Par le point A passent deux cercles de Mohr Γ et Γ' tangents à la courbe intrinsèque.

Au cercle Γ correspond une contrainte principale s'exerçant sur le parement vertical du mur égale à $OC = \varpi h \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$.
A Γ' correspond $OC' = \varpi h \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$.

Boussinesq et Résal ont montré qu'il existait des équilibres limites donnant sur le mur, dans le cas du soutènement, une poussée plus faible que celle qui résulte des contraintes OC , et dans le cas de la butée une poussée plus forte que celle qui résulte des contraintes OC' .

On admet dans chaque cas qu'il suffit que l'ouvrage résiste à l'équilibre limite le plus favorable. Il y a là une hypothèse qui ne peut s'expliquer que par une orientation convenable des premiers glissements. Dans le cas du soutènement, par exemple, la poussée aura d'abord une valeur quelconque intermédiaire entre les équi-

libres de poussée minimum et maximum. Si le mur ne peut résister, en fait, qu'à la poussée minimum, il glissera légèrement en avant en décompressant le massif dont les grains se disposeront de façon à réaliser la poussée minimum.

Nous savons de plus, que, dans cette décompression, les caractéristiques physiques du milieu se modifient. Il se comporte comme un milieu cohérent à coefficient de frottement inférieur à celui du milieu primitif, ce qui est plus favorable à la tenue du mur, du moins s'il est peu profond ⁽¹⁾.

Premier problème. — Abordons le premier problème.

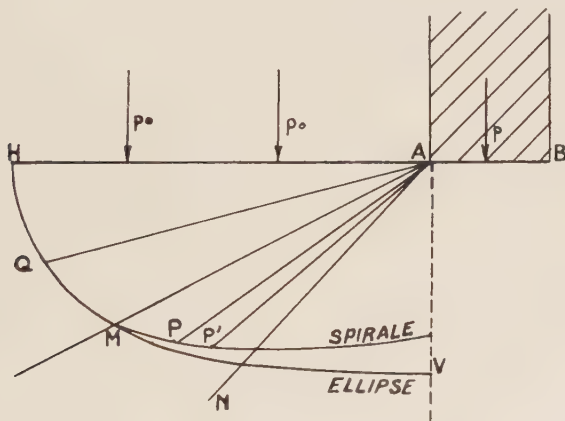


Fig. 33.

Par la surface libre d'un milieu pulvérulent indéfini *supposé non pesant* sont appliquées des contraintes p sur AB, p_0 à l'extérieur AB (*fig. 33*).

Nous cherchons l'équilibre limite tel que le rapport $\frac{p}{p_0}$ soit le plus grand possible.

⁽¹⁾ La poussée sur un mur est d'autant plus forte que l'angle de frottement est plus petit. Mais pour les massifs cohérents, le théorème des états correspondants montre que la poussée ne commence à s'exercer qu'à partir d'une profondeur égale à $\frac{H}{\tan \varphi} \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$ (dans l'hypothèse de Rankine-Lévy-Considère).

Le principe de la méthode est de ramener ce problème aux équilibres limites de soutènement et de butée. Soit AN un plan radiant quelconque issu de A. Nous déterminerons l'équilibre de poussée maximum (ou de butée) s'exerçant à gauche de AN sur ce plan radiant puis l'équilibre de poussée minimum s'exerçant à droite de AN et nous écrirons l'égalité des efforts s'exerçant de part et d'autre de AN.

Étudions l'équilibre de poussée minimum s'exerçant sur AN à partir de p_0 .

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse de Rankine-Lévy. Considérons dans laquelle les contraintes sont parallèles et perpendiculaires à la surface libre. Les contraintes sur les éléments horizontaux sont égales à p_0 en tout point puisque le milieu n'est pas pesant. Les contraintes sur les éléments verticaux sont donc égales à $p_0 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ dans l'équilibre limite de butée que nous étudions.

Traçons l'ellipse indicatrice des contraintes (fig. 34) relative

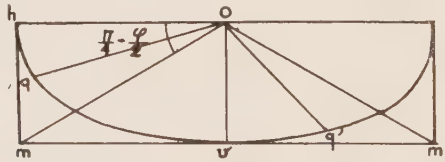


Fig. 34.

à un point quelconque du milieu. On sait que cette ellipse a pour demi-axes les racines carrées des contraintes principales. Dans cette représentation, la contrainte agissant sur un élément plan de direction Oq est donnée par le carré du demi-diamètre conjugué Oq' .

Considérons dans le milieu les plans radiants AQ et AM parallèles à Oq et Om .

Oq' et Om' représentent les racines carrées des contraintes agissant sur tout élément des plans radiants AQ et AM. Il s'ensuit que la contrainte agissant sur un plan radiant tel que AQ, compris entre AH et AM, est plus petite que sa conjuguée l'obliquité crois-

sant de zéro à φ de AH à AM. Entre AM et AV, c'est l'inverse qui se produit.

Cherchons s'il existe un équilibre limite donnant sur le plan radiant AN une poussée plus grande que dans l'hypothèse précédemment considérée de Rankine-Lévy-Considère.

Pour cela considérons les courbes enveloppes des contraintes agissant sur les plans radiants issus de A. Dans l'équilibre précédent les courbes étaient des ellipses homothétiques à l'ellipse indicatrice des contraintes. Soit HQMV l'une d'elles (*fig.* 31). Considérons deux plans radiants AP et AP' infiniment voisins de AM et soit PP' un élément de la courbe enveloppe des contraintes agissant sur les rayons vecteurs dans l'équilibre que nous cherchons. Prenons $AP = r$.

Soit n la valeur de la contrainte normale agissant en tout point de AP. Écrivons l'équilibre du prisme limité dans le plan de figure par APP'.

Prenons les moments des forces agissant sur les différentes faces par rapport à A. La somme algébrique de ces moments est nulle puisque nous supposons le milieu non pesant. La contrainte agissant sur PP' donne un moment nul puisqu'elle passe par A. d'où l'équation

$$\frac{d}{d} \left(nr \times \frac{r}{2} \right) = \text{const.}, \quad \text{d'où} \quad nr^2 = \text{const.}$$

Pour que n soit le plus grand possible il faut que r soit le plus petit possible. Or la direction de la tangente en P' résulte de la composition de la résultante des contraintes agissant sur AP et de la contrainte agissant sur PP' laquelle passe par A. Pour que AP' soit le plus petit possible, il faut que cette dernière contrainte soit la plus grande possible.

En résumé, pour que l'équilibre à poussée maximum soit réalisé il faut que, toutes les fois que la solution est possible, la contrainte soit plus grande sur l'élément tangent que sur l'élément radiant.

Cette condition est déjà réalisée pour l'équilibre précédent depuis AH jusqu'à AM. Cet équilibre étant un équilibre limite compatible avec la condition aux limites (contrainte normale à la surface libre), c'est donc l'équilibre de poussée maximum le plus favorable.

Cherchons maintenant, à partir de AM, l'équilibre le plus favorable.

Dans l'équilibre que nous cherchons les isostatiques ne sont plus représentés par un quadrillage de droites parallèles et perpendiculaires à la surface libre. Considérons deux plans radiants (*fig. 35*)

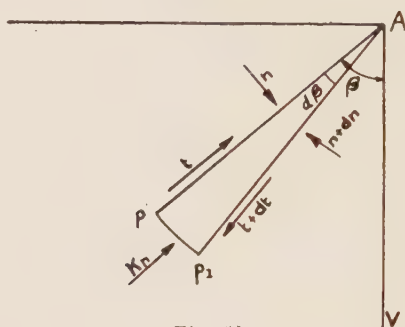


Fig. 35.

infinitement voisins Ap et Ap_1 , p et p_1 étant à l'unité de distance A .

Soient n et t les valeurs de la contrainte tangentielle et normale agissant en chaque point de Ap .

Appelons Kn la contrainte agissant sur l'élément perpendiculaire à Ap . D'après ce qui précède, K doit être le plus grand possible et en tout cas plus grand que 1.

Écrivons encore l'équilibre des forces agissant sur App_1 .

Prenons d'abord les moments par rapport à A .

$$\frac{1}{2} n - \frac{1}{2} (n + dn) + t d\beta = 0,$$

d'où

$$(1) \quad \frac{dn}{d\beta} = 2t.$$

L'équation de projection sur Ap donne

$$n d\beta - t + t d\beta^2 + t + dt - Kn d\beta = 0,$$

d'où

$$(2) \quad \frac{dt}{d\beta} = (K - 1)n,$$

t et n sont solutions du système des deux équations différentielles ci-dessus du premier degré à coefficients non constants.

Cherchons la valeur de K .

Reprenons alors la représentation de Mohr (fig. 36).

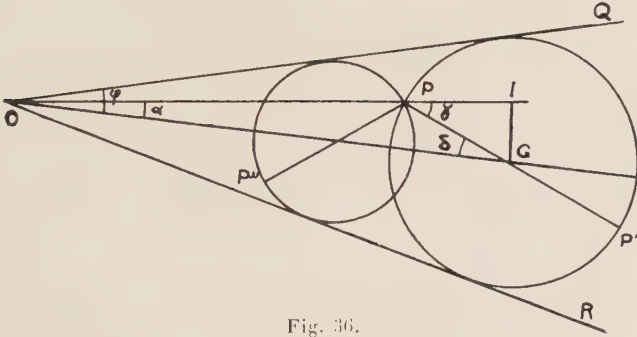


Fig. 36.

Soit OP la contrainte agissant en tout point de Ap . Les deux équilibres limites en p sont représentés par les deux cercles passant par P et tangents à la courbe intrinsèque ⁽¹⁾.

La contrainte sur l'élément plan perpendiculaire passant par M est représenté par OP' ou par OP'' , suivant l'équilibre choisi. D'après ce qui précède, c'est la contrainte $OP' > OP''$ que nous devons choisir.

Calculons le rapport K des projections de OP et OP' sur OG . Soient α l'obliquité de OP et φ la grandeur OP .

Posons $OG = p$. Le rayon du cercle de Mohr est $p \sin \varphi$.

L'angle δ marqué est égal à $\gamma - \alpha$ et dans le triangle IOG on a

$$IG = p \sin \alpha = p \sin \varphi \sin \gamma.$$

Projetons les contours OGP et OGP' sur OG . On a

$$n = p - p \sin \varphi \cos(\gamma - \alpha),$$

$$n' = p + p \sin \varphi \cos(\gamma - \alpha),$$

d'où

$$K = \frac{1 + \sin \varphi \cos(\gamma - \alpha)}{1 - \sin \varphi \cos(\gamma - \alpha)},$$

⁽¹⁾ Dans la représentation de Mohr appliquée à ce problème d'élasticité plane, c'est la normale au plan de figure qui joue le rôle de la contrainte principale intermédiaire.

γ étant donné en fonction de α par l'équation

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi},$$

Le système d'équations différentielles (1) et (2) est-il intégrable ?

Il l'est effectivement et il admet comme solution une famille de spirales logarithmiques homothétiques par rapport au point A, l'angle de la tangente avec le rayon vecteur étant $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

L'équation de ces spirales est en effet $t = n \tan \varphi$.

Dans ce cas $\alpha = \varphi$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$K = \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}.$$

Le système d'équation différentielle devient

$$\frac{dn}{d\beta} = 2t,$$

$$\frac{dt}{d\beta} = 2 \tan^2 \varphi \times n.$$

C'est un système d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants. On vérifie facilement que $t = n \tan \varphi$ est solution de ce système.

En résumé, dans l'équilibre de butée le plus favorable, la courbe enveloppe des contraintes agissant sur les plans radiants est composée :

1° d'une ellipse homothétique à l'ellipse indicatrice de l'équilibre de butée jusqu'au plan faisant avec la surface libre l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

2° à partir de ce plan d'une spirale logarithmique, l'obliquité de la contrainte restant constamment égale à φ .

Reprenons notre massif de fondation s'appuyant sur le plan horizontal H par la surface AB sur laquelle il agit par la contrainte p (fig. 37).

Cherchons maintenant à déterminer à partir du plan horizontal

AB l'équilibre limite tel que la poussée sur le plan radial AN soit minimum.

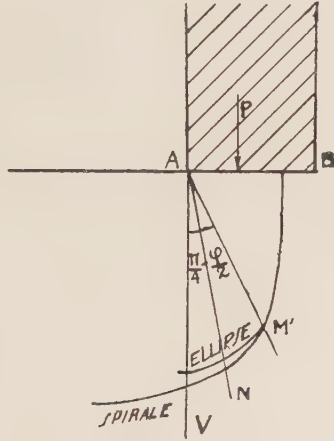


Fig. 37.

On trouvera alors que dans l'équilibre le plus favorable la courbe enveloppe des contraintes agissant sur les plans radiaux se compose :

1° d'une ellipse homothétique à l'ellipse indicatrice de l'équilibre de poussée jusqu'au plan faisant avec la verticale l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

2° A partir de ce plan d'une spirale logarithmique l'obliquité de la contrainte restant encore constamment égale à φ .

Dès lors, pour obtenir la relation cherchée entre p et p_0 il suffit d'écrire que les poussées à droite et à gauche de AN sont égales en valeur absolue.

La contrainte correspondant au plan de plus grand glissement AM dans l'équilibre de butée est $p_0 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$.

Dans l'équilibre de poussée, cette contrainte s'exerçant sur le plan AM' est égale à $p \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$.

Sur la spirale, la contrainte varie en raison inverse du carré, du rayon vecteur.

Or, le rapport des rayons vecteurs dans la spirale logarithmique est $e^{\delta \tan \varphi}$, δ étant l'angle des deux plans AM et AM' égal à $\frac{\pi}{2}$.

Le rapport des contraintes précédentes est donc $e^{\pi \tan \varphi}$, d'où la relation

$$p_0 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{\pi \tan \varphi} = p \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi},$$

$$p = p_0 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi}.$$

C'est la formule cherchée.

Deuxième problème. — Étudions maintenant le deuxième problème celui de la butée d'un massif *pesant* sur un plan faisant un angle de 180° avec la surface libre.

Sur la surface libre H n'agit aucune force. Soit ϖ le poids spécifique du milieu.

Cherchons l'équilibre limite tel que la poussée sur un plan radiant tel que AN soit maximum (*fig.* 38).

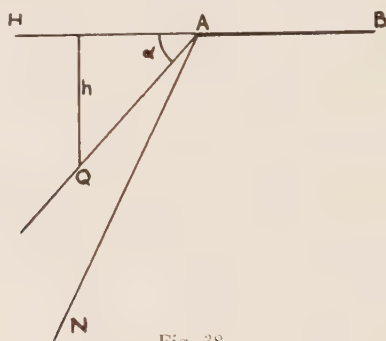


Fig. 38.

Considérons d'abord l'équilibre de Rankine-Lévy-Considère, où les isostatiques forment un quadrillage de droites parallèles et perpendiculaires à la surface.

En un point Q d'un plan radiant AQ, la contrainte sur un élément parallèle à la surface libre est égale à $h\varpi$, h étant la distance de Q à la surface libre. Cette contrainte est principale.

Traçons encore le cercle de Mohr représentant l'équilibre limite supérieur au point Q.

La contrainte agissant en Q (*fig.* 39) sur l'élément situé dans le

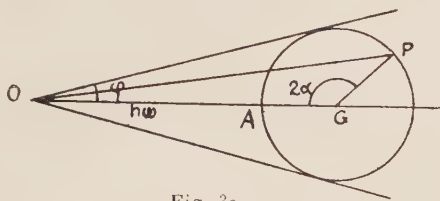


Fig. 39.

plan AQ est représentée par OP tel que GP fasse avec AG l'angle 2α .

Si nous cherchons la contrainte s'exerçant en un autre point Q' du plan radiant AQ nous trouverons un cercle homothétique par rapport à O dans le rapport $\frac{AQ'}{AQ}$, et comme l'angle 2α reste le même, nous aurons une contrainte OP' homothétique dans le même rapport.

Dans l'équilibre considéré, les contraintes aux différents points d'un plan radiant sont homothétiques (au lieu d'être égales comme dans le cas précédent), mais les courbes enveloppes des contraintes s'exerçant sur les plans radiants sont encore des ellipses homothétiques à l'ellipse indicatrice des contraintes de l'équilibre supérieur au point A.

Si nous cherchons s'il existe une autre disposition d'isostatiques donnant un équilibre de butée plus favorable, en écrivant l'équilibre du prisme APP' (*fig.* 33), nous trouverons

$$d\left(\frac{nr^2}{2} \times \frac{2}{3}r\right) = \frac{r^2}{2} d\beta \times \frac{2}{3}r,$$

$$r^3 \frac{dn}{d\beta} + 3r^3 n \frac{dr}{d\beta} = \frac{r^3}{2} d\beta,$$

$\frac{dn}{d\beta}$ et $\frac{dr}{d\beta}$ varient encore en sens contraire. Il faut rendre r le plus petit possible, ce qui exige que la contrainte sur l'élément tangent soit la plus grande possible:

Si nous écrivons encore l'équilibre du prisme App₁ où pp₁ est l'élément perpendiculaire à Ap (*fig.* 35), nous aurons les deux équations différentielles

$$\frac{1}{3}n - \frac{1}{3}(n + dn) + t d\beta = \frac{d\beta}{3} \sin \beta$$

ou

$$(3) \quad \frac{dn}{d\beta} = 3t - \sin \beta,$$

et pour la projection sur Ap

$$\frac{n}{2} d\beta - \frac{dt}{2} - Kn d\beta + \frac{d}{2} \cos \beta = 0$$

ou

$$(4) \quad \frac{dt}{d\beta} = (2K - 1)n - \cos \beta,$$

K ayant la valeur trouvée

$$K = \frac{1 + \sin \varphi \cos(\gamma - \alpha)}{1 - \sin \varphi \cos(\gamma - \alpha)} \quad \text{avec} \quad \sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}.$$

Ces équations (3) et (4) ne sont plus intégrables. La courbe intégrale est comprise entre l'ellipse et la spirale logarithmique précédente. Nous appellerons cette courbe, courbe de l'équilibre supérieur de Boussinesq-Résal par analogie avec celle qui a été considérée par ces deux auteurs pour l'équilibre inférieur.

En résumé, dans l'équilibre limite le plus favorable de butée d'un massif pesant, la courbe enveloppe des contraintes s'exerçant sur les plans radiants se compose :

1° D'une ellipse homothétique à l'ellipse indicatrice des contraintes de l'équilibre supérieur;

2° De la courbe de Boussinesq-Résal, intermédiaire entre le prolongement de cette ellipse et la spirale logarithmique précédente.

Calculons une limite supérieure du terme correctif apporté par le deuxième problème. Soit l la largeur de la fondation.

Première approximation. — Écrivons l'équilibre du prisme limité par l'ellipse indicatrice E (*fig. 40*), la courbe de Boussinesq S et l'ellipse E' . Prenons les moments par rapport à A . Les contraintes agissant sur E , S et E' déterminent un moment nul. Par suite, c'est le moment du poids du prisme qui équilibre la réaction cherchée sur AB .

Cette réaction croît donc linéairement à partir de chaque extrémité A et B . Soit p' la contrainte moyenne due à la réaction.

Sur chaque demi-largeur de la fondation cette contrainte résulte d'une force $\frac{p'l}{2}$ appliquée à la distance $\frac{2}{3} \frac{l}{2}$ de A. Il suffit donc d'écrire que le moment du poids du prisme est égal à $\frac{p'l^2}{6}$. Remplaçons le prisme considéré par un prisme limité par les quarts

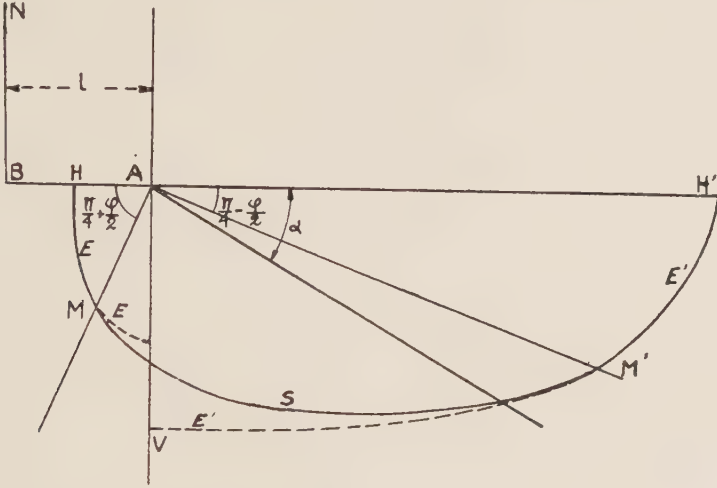


Fig. 40.

d'ellipse E et E', E' étant tangent au point M' à la spirale logarithmique d'angle φ . Le nouveau prisme donnera un moment supérieur au précédent et par conséquent une limite supérieure de p' .

Prenons comme unité de longueur la moitié de la largeur de la fondation. Les demi-axes de l'ellipse E sont 1 et $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, ceux de l'ellipse E' sont $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi}$ et $e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi}$. Le moment de l'aire d'un quart d'ellipse de demi-axes a et b par rapport au demi-axe b étant $\frac{a^2b}{3}$, il en résulte l'équation suivante :

$$\frac{p'l^2}{6} = \varpi \left(\frac{l}{2}\right)^3 \left[\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\pi \tan\varphi} e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi}}{3} - \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{3} \right],$$

soit

$$p' = \frac{\varpi l}{4} \left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\pi \tan\varphi} e^{\frac{\pi}{2}\tan\varphi} - \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right],$$

p' est donc inférieur à

$$\varpi l \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi} \frac{e^{\frac{\pi}{2} \tan \varphi}}{4}.$$

Tenant compte de ce terme correctif, la formule des fondations peut s'écrire

$$p = \varpi h \tan^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi} \quad (1 + \varepsilon)$$

avec

$$\varepsilon = \frac{l}{h} \frac{e^{\frac{\pi}{2} \tan \varphi}}{4}.$$

Ce terme augmente évidemment avec la largeur des fondations et diminue avec la profondeur

Calculons p' pour le sable de Nemours

$$\varphi = 30^\circ, \quad \varpi = 1,5 \text{ t/m}^3,$$

$$l = 0^m, 20, \quad p' = \frac{1,5 \times 0,20}{4} (18 \times 2,5 - 1,7) = 3,25 \text{ t/m}^2,$$

soit 0,325 kg/cm², ce qui est très faible.

Deuxième approximation. — Calculons les moments exacts donnés par les aires radiales limitées par l'ellipse E, la spirale logarithmique S et l'ellipse E'

Soient M le moment total donné par les aires limitées par les deux ellipses et M' le moment donné par l'aire AMM' limité par la spirale S.

On aura encore

$$p' = \frac{3\varpi l}{4} (M + M').$$

Calculons M. L'aire H'AM' est égal au huitième de l'ellipse totale soit $\frac{\pi}{8} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi}$. En raisonnant sur le cercle de rayon R = AH' qui se projette suivant l'ellipse E', on trouve que le centre de gravité est à la distance $\frac{4R\sqrt{2}}{3\pi} = 0,6R$ de OV.

Le moment dû à l'aire H'AM' est donc $0,6 \frac{\pi}{8} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\frac{3\pi}{2} \tan \varphi}$.

On trouverait de même que le moment dû à HAM est

$$= 0,6 \frac{\pi}{8} \tan \varphi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Il s'ensuit que

$$M = 0,236 \left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\frac{3\pi}{2} \tan \varphi} - \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

Calculons M'.

On a

$$M' = \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \frac{2}{3} r \cos \alpha \frac{1}{2} r^2 dx.$$

Or

$$r = r_0 e^{-\alpha \tan \varphi},$$

r devant prendre la valeur

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2} \tan \varphi}}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \quad \text{pour } \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$r_0 = \frac{e^{\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \tan \varphi}}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

L'expression de M' s'écrit

$$M' = \frac{r_0^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} e^{-3\alpha \tan \varphi} \cos \alpha d\alpha.$$

En intégrant, on trouve

$$M' = \frac{r_0^3}{3(9 \tan^2 \varphi + 1)} [(\sin \alpha - 3 \tan \varphi \cos \alpha) e^{-3\alpha \tan \varphi}]_{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}}.$$

Finalement, toutes réductions faites, il vient

$$\begin{aligned} M' &= \frac{e^{\frac{3\pi}{2} \tan \varphi}}{6 \sqrt{2} (9 \tan^2 \varphi + 1) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \\ &\times \left\{ \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + 3 \tan \varphi \right] e^{-\frac{3\pi}{2} \tan \varphi} \right. \\ &\quad \left. + 3 \tan \varphi \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Calculons encore la valeur de p' pour $\varphi = 30^\circ$:

$$\varpi = 1,5 \text{ t/m}^3, \quad l = 0^m,20, \quad M = 10,4, \quad M' = 3,9, \quad p' = 3,22 \text{ t/m}^2,$$

soit $0,322 \text{ kg/cm}^2$.

Les deux approximations donnent à peu près le même résultat, la première ayant l'avantage de s'exprimer sous une forme simple.

En résumé, la théorie des fondations montre que la pression limite que peut supporter sans glissement un massif pulvérulent d'angle φ et de poids spécifique ϖ sur lequel on fonde à la profondeur h est donné par la formule

$$p = p_0 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi} \quad (1 + \varepsilon),$$

ε étant un terme correctif qui augmente avec la largeur l de la fondation et ayant pour limite supérieure

$$\varepsilon = \frac{l}{4h} e^{\frac{\pi}{2} \tan \varphi}.$$

CHAPITRE VII.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX SUR LE SABLE DE NEMOURS.

Dispositif expérimental. — La photographie (fig. 41) indique le dispositif adopté. Nos expériences ont consisté à observer l'enfon-

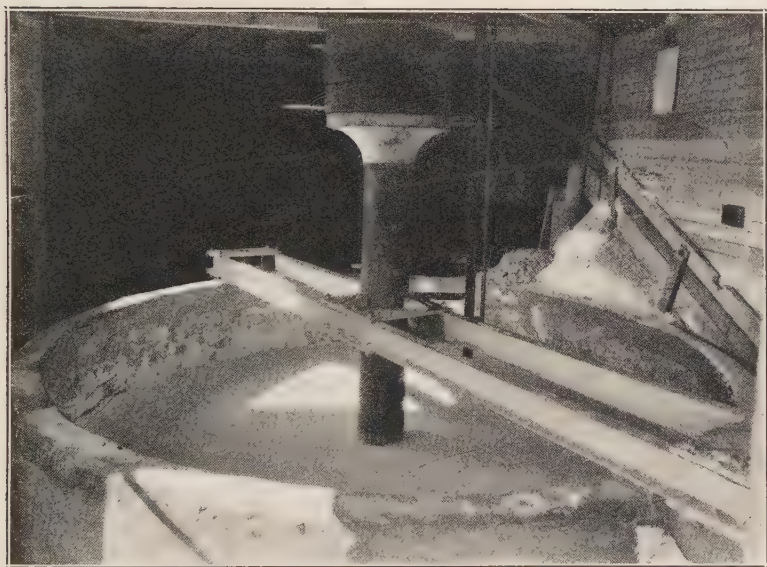


Fig. 41.

cement d'un piston lesté de charges connues et guidé sans frottement, dans une cuve de grandes dimensions remplie de sable.

Le piston de forme cylindrique, à section circulaire de 20^{cm} de diamètre présente une embase élargie à 40^{cm} de diamètre à sa partie supérieure qui sert de plate-forme pour les charges constituées soit par des plaques de fonte demi-circulaires de 73^{kg} , soit plus simplement par des gueuses de fonte pour les très lourdes charges.

Ce piston est guidé par des roulements à billes à axes horizontaux A, B, C, A', B', C' répartis à 120° sur deux plaques d'acier F et F' qui entretoisent deux fers à U supportés par deux poteaux en béton extérieurs à la cuve.

Les figures n^{os} 42 et 43 donnent le détail des supports de ces roulements à billes. On remarquera qu'il est prévu un dispositif (ovalisation des trous de fixation) permettant de les rapprocher plus ou moins de la surface du piston, de façon à obtenir le serrage voulu. De cette façon, les frottements sont très faibles. Les fers à U, d'autre part, ayant un très grand moment d'inertie, leur déformation verticale est négligeable. On peut donc mesurer les déplacements du piston par rapport à la plaque supérieure qui les entretoise.

Dans ce but, on a disposé sur celle-ci une petite table parfaitement dressée dont on prend, au moyen d'un pied à coulisse, au dixième de millimètre, la distance par rapport à un index vissé dans le corps du piston (*voir* la photographie ci-dessus). La même disposition, diamétralement opposée, permet de se rendre compte si les déplacements du piston sont bien verticaux. On lit ainsi directement tous les mouvements du piston avec l'approximation désirée.

La cuve est circulaire avec un diamètre de 3^m,50 et une profondeur de 4^m dont 3^m sont enterrés. Nous avons rempli cette cuve avec du sable de Nemours. Il ressort en effet des résultats de la première partie de cette thèse, que ce sable est le corps qui, grâce à son homogénéité et à la finesse de ses grains, donne les résultats les plus constants. De plus, son angle de frottement, avec enchevêtrement, ne dépasse pas 30°, ce qui permet d'éviter, dans nos expériences, les perturbations des parois.

Il ressort en effet de l'étude du Chapitre VI que, pour que la courbe enveloppe des contraintes s'exerçant sur les plans radiants ne coupe pas les parois, il faut que les diamètres de la cuve et du piston soient dans un rapport supérieur à

$$\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\pi \tan \varphi}}.$$

Or cette quantité est égale pour $\varphi = 30^\circ$ à $\sqrt{18,16} = 4,28$ qui est bien inférieur à

$$\frac{3,50}{0,20} = 17,5.$$

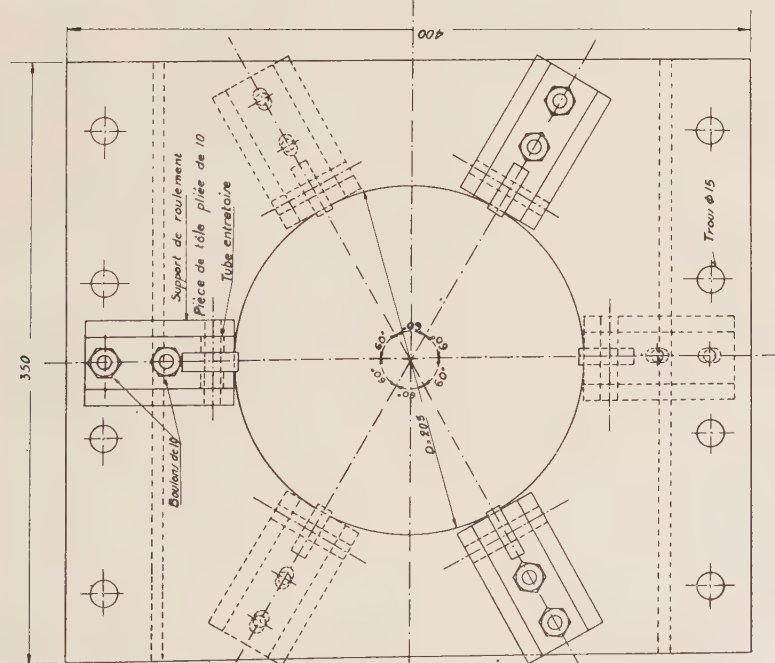


Fig. 42.

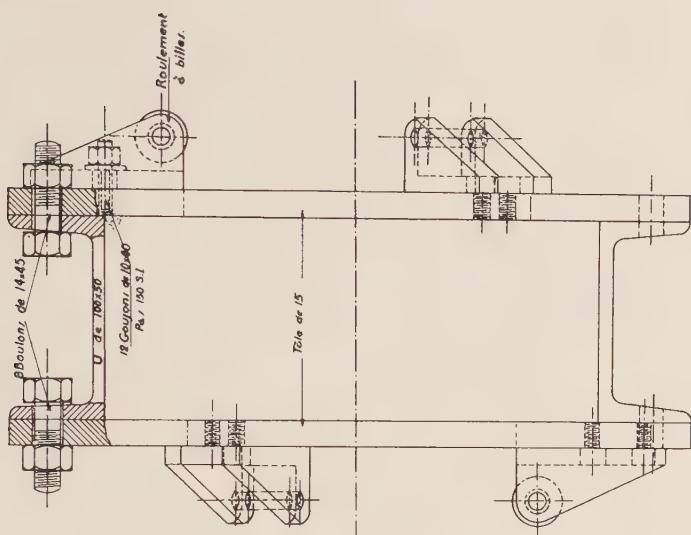


Fig. 43.

Le piston ayant une hauteur de 1^m et la cuve une profondeur de 4^m, on est certain que les courbes de pression ne rencontrent pas non plus le fond de la cuve. Les dimensions de la cuve nous permettront à l'avenir de pousser plus loin nos expériences pour des charges très fortes avec des pistons de même section, de longueur double ou triple.

Résultats expérimentaux. — Notre étude a pour but unique de rechercher les phénomènes de glissement par rupture d'équilibre à la limite desquels l'équation $T_{\leq} N \tan \varphi$ n'est plus vérifiée et non pas les phénomènes de tassement.

Nous commencerons donc par charger le piston de poids connus; nous laissons le tassement s'opérer et lorsque le piston a trouvé son équilibre en profondeur, nous nivelons avec soin la surface du sable dans la cuve et nous enlevons couche par couche ce sable, de façon à diminuer l'enfoncement h du piston par rapport à la surface libre. Il arrive un moment à partir duquel on observe un enfoncement de piston. On a atteint alors la profondeur h minimum à partir de laquelle il y a rupture d'équilibre.

Première expérience. — Le piston est chargé de six plaques demi-circulaires.

La charge totale est

Six plaques à 73 ^{kg}	438 ^{kg}
Poids du piston.....	99,5
	537,5

La pression sur la fondation est donc

$$\frac{537,5}{\frac{\pi}{4} \times (20)^2} = 1,72 \text{ kg/cm}^2.$$

Au bout de huit jours, le piston a atteint son équilibre en profondeur.

L'enfoncement du piston est alors 35^{cm},9. Le tassement du piston est négligeable (quelques dixièmes de millimètre par jour).

Pressions en kg/cm^2 : 1,72.

DATES.	HEURES.	LECTURE du pied à coulisse (en cm).	ENFONCEMENT		OBSERVATIONS.
			relatif depuis la dernière lecture (en cm).	total par rapport à la surface libre.	
Mercre. 20 févr..	8 ^h	23,44		34,9	On enlève 5 ^{cm}
	8	23,44	0	29,9	
Jeudi 21 » ..	8	23,35	0,09	29,99	On enlève 5 ^{cm}
	8	23,35	0	24,99	
Vendr. 22 » ..	8	23,32	0,03	25,02	On enlève 5 ^{cm}
	8	23,32	0	20,02	
Sam. 23 » ..	8	23,10	0,22	20,24	On enlève 5 ^{cm}
	8	23,10	0	15,24	
Lundi 25 » ..	8	22,00	1,1	16,34	On enlève 5 ^{cm}
Mercre. 27 » ..	8	20,9	1,1	17,44	
	8	20,9	0	12,44	On enlève 5 ^{cm}
Jeudi 28 » ..	8	18,6	2,3	14,74	
Vendr. 1 ^{er} mars.	8	18,2	0,4	15,14	On enlève 5 ^{cm}
	8	18,2	0	10,14	
Sam. 2 » .	8	15,50	2,7	12,84	On enlève 5 ^{cm}
Lundi 4 » .	8	15,30	0,2	13,04	
	8	15,30	0	8,04	On enlève 5 ^{cm}
Jeudi 7 » .	8	12,48	2,82	10,86	
Jeudi 14 » .	8	11,52	0,96	11,82	On observe une fissure circulaire de 0 ^m ,27 de rayon
	8	11,52	0	6,82	
Jeudi 21 » .	8	9,60	1,92	8,74	
Mardi 26 » .	8 ^h	7,96	1,64	10,37	

Deuxième expérience. — La charge est portée à $1051^{kg},5$ et constituée par le piston, les six plaques précédentes et 514^{kg} de gueuses de fonte soit

Piston.....	$99,5^{kg}$
Six plaques de 73^{kg}	448
Gueuses.....	514
	1051,5

qui déterminent sur la fondation une pression de

$$\frac{1051,5}{314} = 3,34 \text{ kg/cm}^2.$$

On laisse s'opérer le tassement sous ces charges. Voici le tableau de cette consolidation.

DATES.	HEURES.	PRESSION en kg/cm ² .	LECTURE du pied à coulisse.	ENFONCEMENT		OBSER- VATIONS.
				relatif (en cm).	total.	
27 mars..	^b 10	0,318	48,90		14,3	Piston seul
» ..	10.05	0,552	45,90	3,0	17,3	1 plaque
» ..	10.10	0,786	42,90	3,0	20,3	2 plaques
» ..	10.15	1,020	39,90	3,0	23,3	3 plaques
» ..	10.20	1,254	38,10	1,8	25,1	4 plaques
» ..	10.25	1,488	35,40	2,7	27,8	5 plaques
» ..	10.30	1,722	33,40	2,0	29,8	6 plaques
28 mars..	9	1,722	32,90	0,5	30,3	
» ..	17	1,722	32,80	0,1	30,4	
» ..	17.30	3,34	23,60	0,2	39,6	514 ^{kg} en plus
» ..	18	3,34	22,70	0,9	40,5	
» ..	21	3,34	22,0	0,7	41,2	
29 mars..	7	3,34	21,5	0,5	41,7	
30 mars..	8	3,34	20,8	0,7	42,4	
31 mars..	8	3,34	20,5	0,2	42,7	
1 ^{er} avril..	8	3,34	20,3	0,2	42,9	

Les tassements décroissent donc très rapidement. On commence alors la deuxième expérience dont les résultats sont résumés ci-après :

DATES.	HEURES.	LECTURE du pied à coulisse.	ENFONCEMENT		OBSERVATIONS.
			relatif depuis la dernière lecture (en cm.).	total par rapport à la surface libre.	
1 ^{er} avril..	8 ^{h m}	20,30		42,9	On retire 22 ^{cm} ,9
» ..	8	20,3	0,0	20	
» ..	18	16	4,3	24,3	
» ..	14	14	2	26,3	
» ..	16	13,4	0,6	26,9	
» ..	18	13,1	0,3	27,2	On enlève 8 ^{cm} ,1
2 avril..	8	12,4	0,7	27,9	
» ..	16	12,2	0,2	28,1	
» ..	18	12,2	0	20	
» ..	18,10	9,8	2,4	22,4	
» ..	19	9,2	0,6	23	On enlève 4 ^{cm} ,6
3 avril..	8	8,2	1	24	
4 avril..	8	7,6	0,6	24,6	
» ..	9	7,6	0	20	
» ..	9,30	7,3	0,3	20,3	
» ..	10	7,2	0,1	20,4	(1) Changement de table
» ..	18	6,4	0,8	21,2	
5 avril..	8	6,0	0,4	21,6	
» ..	18	5,8	0,2	21,8	
6 avril..	8	5,6	0,2	22	
» ..	9	5,6 ⁽¹⁾ ou 22,4	0	15 ⁽²⁾	(2) On note une fissure en forme de cercle de 0 ^{cm} ,27 de rayon
» ..	10	19,4	3	18	
» ..	10,30	18,4	1	19	
» ..	11	17,6	0,8	19,8	

DATES.	HEURES.	LECTURE du pied à coulisse.	ENFONCEMENT		OBSERVATIONS.
			relatif depuis la dernière lecture (en cm.).	total par rapport à la surface libre.	
6 avril..	^h ^m 11.30	17,4	0,2	20	On enlève 5 ^{cm} ,85
» ..	12	17,3	0,1	20,1	
» ..	17	17,2	0,1	20,2	
7 avril..	9	17,0	0,2	20,4	
8 avril..	8	16,8	0,2	20,6	
9 avril..	8	16,7	0,1	20,7	
» ..	18	16,55	0,15	20,85	
» ..	18	16,55	0	15	
» ..	19	16,45	0,1	15,1	
» ..	20	13,45	3,05	18,15 ⁽³⁾	
10 avril..	8	12,8	0,6	18,75	
» ..	17	12,5	0,3	19,05	
11 avril..	8	12,1	0,4	19,45	
» ..	9	12,05	0,05	19,5	
» ..	9	12,05	0,00	10,0	
» ..	10	8,45	3,60	13,6	(3) Enfoncement brus- que avec apparition d'une fissure circu- laire de 0 ^{cm} ,27 de rayon On enlève 9 ^{cm} ,5
» ..	10.30	8,2	0,25	13,85	
» ..	11	7,36	0,84	14,69	
» ..	11.30	6,5	0,86	15,55	
» ..	13	6,2	0,3	15,85	
» ..	19	5,9	0,3	16,15	
12 avril..	8	5,5	0,4	16,55	
» ..	12	5,2	0,3	16,85	
» ..	16	4,7	0,5	17,35	
» ..	18	4,5	0,2	17,55	
13 avril..	8	4,0	0,5	18,05	
» ..	11	3,9	0,1	18,15	
» ..	14	3,85	0,05	18,2	

DATES.	HEURES.	LECTURE du pied à coulisse.	ENFONCEMENT		OBSERVATIONS.
			relatif depuis la dernière lecture (en cm.).	total par rapport à la surface libre.	
13 avril..	16 ^h m	3,75	0,10	18,3	
» ..	18	3,64	0,11	18,41	
14 avril..	8	3,35	0,29	18,70	
15 avril..	8	2,9	0,45	19,15	
» ..	14	2,85	0,05	19,20	
» ..	18	2,80	0,05	19,25	
16 avril..	8	2,60	0,2	19,45	
» ..	9.30	2,55	0,05	19,50	
» ..	9.30	2,55 ^(*) ou 21.5	0	14	On enlève 5 ^{cm} ,50 (^(*) Changement de table
» ..	10.30	21,3	0,2	14,2	
» ..	11	20,8	0,5	14,7	
» ..	11.30	20,4	0,4	15,1	
» ..	12	19,8	0,6	15,7	
» ..	13	18,9	0,9	16,6	
» ..	14	18,6	0,3	16,9	
» ..	15	18,3	0,3	17,2	
» ..	16	18,2	0,1	17,3	
» ..	17	18	0,2	17,5	
» ..	18	17,8	0,2	17,7	
» ..	20	17,6	0,2	17,9	
» ..	21	17,4	0,2	18	
17 avril..	8	16,8	0,6	18,7	
» ..	10	16,7	0,1	18,8	
» ..	13	16,55	0,15	18,95	
» ..	17	16,4	0,15	19,10	
18 avril..	8	16	0,4	19,5	
» ..	12	15,95	0,05	19,55	
» ..	16	15,85	0,10	19,65	
19 avril..	8	15,6	0,25	19,8	

Troisième expérience. — La charge est portée à 1628^{kg} et constituée par le piston, les six plaques et des gueuses.

Voici les résultats de tassement :

DATES.	HEURES.	PRES- SION (en kg/cm ²).	LECTURE du pied à coulisse.	ENFONCEMENT		OBSERVATIONS.
				relatif (en cm).	total.	
6 mai.	16 ^h m	0,318	77,3	0	7,8	Piston seul
» .	16.05	0,552	77	0,3	8,1	1 plaque
» .	16.10	0,786	76,7	0,3	8,4	2 plaques
» .	16.15	1,020	74	2,7	11,1	3 plaques
» .	16.20	1,254	70	4	15,1	4 plaques
» .	16.25	1,488	64	6	21,1	5 plaques
» .	16.30	1,722	61	3	24,1	6 plaques
» .	16.35	2,297	53	8	32,1	Surcharge de 181 ^{kg}
» .	16.40	2,87	49	4	36,1	Id.
» .	16.45	3,447	45	4	40,1	Id.
» .	16.50	4,022	41	4	44,1	Id.
» .	16.55	4,597	39	2	46,1	Id.
» .	17	5,17	35	4	50,1	Id.
» .	20	5,17	34	1	51,1	
7 mai.	8	5,17	32,5	1,5	52,6	
»	16	5,17	31,2	1,3	53,9	
8 mai.	8	5,17	31	0,2	54,1	
»	14	5,17	30,7	0,3	54,4	
9 mai.	8	5,17	30,4	0,3	54,7	
»	17	5,17	30,2	0,2	54,9	
10 mai.	8	5,17	30,1	0,1	55	
»	19	5,17	29,8	0,3	55,3	
11 mai.	8	5,17	29,6	0,2	55,5	
»	19	5,17	29,6	0	55,5	

On commence alors la troisième expérience dont les résultats sont résumés ci-après :

DATES.	HEURES.	LECTURE du pied à coulisse.	ENFONCEMENT		OBSERVATIONS.
			relatif (en cm).	total.	
11 mai.	19 ^{h m}	29,6	0	55,5	On retire 28 ^{cm} ,8
» .	19	29,6	0	26,7	
» .	20	26,3	3,3	30	
13 mai.	8	24,7	1,6	31,6	On enlève 11 ^{cm} ,9 On observe une fissure cir- culaire de 26 ^{cm} de rayon On enlève 9 ^{cm} ,1
» .	21	24,4	0,3	31,9	
» .	21	24,4	0	20	
» .	21.15	20,3	4,1	24,1	
» .	21.15	20,3	0	15	
» .	22	16	4,3	19,3	
» .	22.30	14,2	1,8	21,1	
14 mai.	5	13,2	1	22,1	
» .	8	12,9	0,3	22,4	
» .	10	12,7	0,2	22,6	
» .	14	5,4	7,3	29,9	Rupture d'un roulement à bille, remplacé immé- diatement
» .	16	5,2	0,2	30,1	
15 mai.	8	4,8	0,4	30,5	
16 mai.	8	4,6	0,2	30,7	
17 mai.	8	4,1	0,5	31,2	
18 mai.	8	3,6	0,5	31,7	
20 mai.	8	2,9	0,7	32,4	
21 mai.	8	2,7	0,2	32,6	
22 mai.	8	2,65	0,05	32,65	
23 mai.	8	2,65	0	32,65	
24 mai.	8	2,60	0,05	32,7	
25 mai.	8	2,50	0,1	32,8	
26 mai.	8	2,45	0,05	32,85	
27 mai.	8	2,40	0,05	32,9	
28 mai.	8	2,35	0,05	32,95	
29 mai.	8	2,35	0	32,95	
30 mai.	8	2,30	0,05	33	
31 mai.	8	2,15	0,15	33,15	
1 ^{er} juin.	8	2,10	0,05	33,2	
2 juin.	8	2,05	0,05	33,25	
3 juin.	8	2,00	0,05	33,3	

CHAPITRE VIII.

INTERPRÉTATION.

Nos expériences montrent que la hauteur h cherchée est approximativement de

^m 0,10	pour	$p = 1,72 \text{ kg/cm}^2$,
0,20	»	$p = 3,34 \quad \text{»} \quad .$
0,34	»	$p = 5,17 \quad \text{»} \quad .$

Prenons une densité moyenne de $\varpi = 1,5 \text{ T/m}^3$ et un angle φ de 30° pour lequel $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\tan \varphi} = 18,16$. La formule

$$p = \varpi h \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\tan \varphi},$$

indique qu'on devrait observer des hauteurs h qui seraient respectivement de

^m 0,63	pour	$p = 1,72 \text{ kg/cm}^2$,
1,22	»	$p = 3,34 \quad \text{»} \quad .$
1,90	»	$p = 5,17 \quad \text{»} \quad .$

profondeurs qui sont ramenées à 0,52 — 1,11 et 1,79 si l'on tient compte des 300 g/cm² dues au terme correctif apporté par le deuxième problème.

Cette formule semble donc très pessimiste. Nous allons voir cependant qu'elle est encore optimiste par rapport à la plupart des formules existantes.

Le tableau suivant donne les valeurs h calculées avec les différentes formules citées plus haut.

PRESSION (en kg/cm ²).	Rankine.	Wierendel.	Jankowski.	Pigeaud.	Caquot.	EXPÉRIENCE.
1,72	1,27	0,55	0,16	2,06	0,52	0,10
3,34	2,47	0,77	0,32	4	1,11	0,20
5,17	3,83	0,97	0,50	6,20	1,79	0,34

La formule qui semble se rapprocher le plus de la réalité est celle de Jankowski. Il nous semble difficile néanmoins de faire crédit à cette formule qui s'écrit, nous le rappelons

$$p = 2 \pi h \left(\frac{1 + \sqrt{2 \sin \varphi}}{1 - \sqrt{2 \sin \varphi}} \right)^2$$

et qui donne une résistance infinie pour $\varphi = 45^\circ$.

Mais cette formule présente une supériorité indéniable sur les autres, c'est qu'elle a été adaptée pour cadrer avec l'expérience pour φ voisin de 30° . A cet égard nous avons trouvé un intérêt très vif à relire le Mémoire un peu oublié de Platon Jankowski, Ingénieur des voies de communication en Russie ⁽¹⁾. Il a réalisé avec M. Kourдумoff sous la direction du professeur Belebussy, en 1889 de nombreuses expériences sur la résistance des sols, sablonneux aux charges verticales. Il expérimentait sur un seul sable dont l'angle φ indiqué était de $33^\circ 32'$ (Le Mémoire ne contient aucune indication sur la détermination aussi précise de cet angle).

Ce sable contenu dans un tonneau cylindrique de 0^m,70 de hauteur et de 0^m,90 de diamètre recevait les charges de prismes carrés de $0,025 \times 0,203$; $0,051 \times 0,203$; $0,076 \times 0,203$; $0,102 \times 0,203$. Ces expériences, au nombre d'une centaine, lui donnèrent pour $\varphi = 33^\circ 32'$ quelle que fut la section du prisme, une valeur pour la fonction $f(\varphi)$ telle que $p = \pi h f(\varphi)$. Il détermina la forme de la fonction $f(\varphi)$ au moyen de considérations

⁽¹⁾ *Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France*, novembre 1892 et *Congrès Interantional de Procédés de Construction* de 1889, par MM. MOREAU et PETIT, p. 235, Paris (Baudry).

basées sur la théorie du prisme de Coulomb reconnue fausse aujourd'hui.

Mais le grand mérite de Jankowski a été de montrer le véritable mécanisme des fondations : le refoulement latéral, que M. Kourdumoff a réussi à photographier, comme nous l'indiquons ci-après.

Les deux autres formules, celles de MM. Pigeaud et Wierendel sont théoriques. Les raisonnements qui y conduisent présentent, à notre avis, deux insuffisances. La première suppose que s'il y a glissement d'une fondation en un point, il y aura glissement en tous points. Elle conduit d'ailleurs à des résultats fort éloignés de l'expérience ($6^m, 20$ au lieu de $0, 32$ pour $p = 5 \text{ kgs/cm}^2$). La seconde suppose que la contrainte principale sur la paroi latérale de la fondation est inclinée sur la normale à l'angle φ pour donner une force de frottement, ce qui est impossible puisqu'elle est principale.

Trois causes possibles pour expliquer la divergence de la formule exposée avec l'expérience :

a. L'apparition des fissures circulaires nettement caractérisées, indiquées dans nos tableaux, au moment des glissements, semble montrer que le massif pulvérulent au-dessus du plan H de fondation n'est pas soulevé par éléments cylindriques verticaux, mais intervient également par son frottement.

A cet égard, nous avons monté une expérience pour observer les mouvements du sable à la surface pendant la descente du piston. Un fil d'acier très fin était dressé entre deux points diamétralement opposés de la cuve, de façon à être tangent à un bourrelet rectiligne de très faible hauteur ménagé à la surface du sable. Un éclairage intense derrière le fil permettait de constater (avec une lunette visant à travers un regard ménagé dans la paroi de la cuve) les mouvements du bourrelet par rapport au fil. On constate alors nettement qu'à l'extérieur de la fissure ⁽¹⁾ circulaire le sable monte tandis que, entre la fissure et le piston, il ne subit pas de mouvement sensible. Cette expérience montre bien qu'il y a refoulement du sable latéralement et que les courbes de pression se retournent.

(1) Les fissures concentriques au piston observées présentaient des rayons variant de $0^m, 25$ à $0^m, 28$.

D'autre part, elle semble montrer que le milieu pulvérulent au-dessus du plan horizontal H de fondation se soulève non pas suivant des éléments cylindriques verticaux, mais bien plutôt inclinés.

Supposons que cette inclinaison soit maximum et égale à l'angle

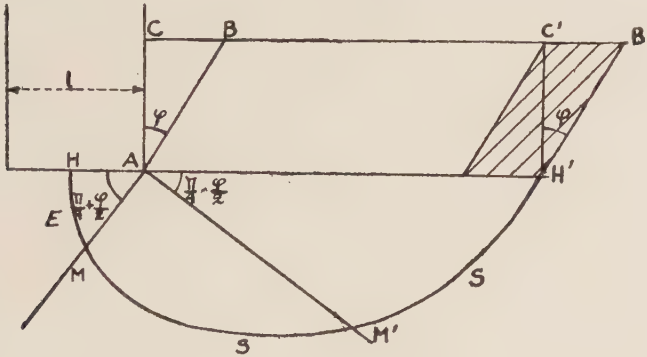


Fig. 44.

de frottement φ . Voici comment la théorie précédente est modifiée (fig. 44).

La courbe des contraintes conjuguées se compose alors de l'ellipse E et de la spirale S jusqu'au plan horizontal H au-delà duquel elle se continue par une droite inclinée à l'angle φ sur la verticale.

La contrainte en M' est $p \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) e^{-\pi \tan\varphi}$, le rayon vecteur étant égal à

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2} \tan\varphi}}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

en prenant AH = 1.

La contrainte en H' est égale à

$$p \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) e^{\left(-\frac{3\pi}{2} + \varphi\right) \tan\varphi}.$$

Le rayon vecteur AH' étant égal à

$$\frac{e^{\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan\varphi}}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

La contrainte en H' est équilibrée par $\frac{h\varpi}{\cos \varphi}$. D'où la nouvelle formule

$$p = \frac{\varpi h \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi \right) \tan \varphi}}{\cos \varphi},$$

ou encore

$$p = \varpi h \frac{e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi \right) \tan \varphi}}{1 - \sin \varphi}.$$

La fonction de φ multiplicatrice de ϖh est égale à 21,6 contre 18,16 pour la formule précédente.

D'autre part, l'inclinaison des prismes de soulèvement met en jeu un volume supplémentaire du massif pour résister au soulèvement.

Ce volume est égal à celui du prisme qui se projette suivant ACB ou HC/B'. Tout se passe donc comme si la hauteur h était augmentée de la quantité $\varepsilon' h$,

$$\varepsilon' h = \frac{\frac{1}{2} h^2 \tan \varphi}{\frac{l}{2} \frac{e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \tan \varphi}}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}} = \sqrt{2} \frac{h^2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{l e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \tan \varphi}}.$$

Calculons ε' pour $l = 0,20$. On trouve $\varepsilon' = 1,06 h$.

La nouvelle formule des fondations s'écrit alors :

$$p = \varpi h (1 + 1,06 h) \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi \right) \tan \varphi}.$$

Supposons $\varphi = 30^\circ$, $\varpi = 1,5 \text{ T/m}^3$, $p = 33 h (1 + 1,06 h)$.

On trouve alors comme valeurs de h : 0,37 pour 1,72 kg/cm²; 0,61 pour 3,34 kg/cm²; 0,83 pour 5,17 kg/cm², valeurs qui sont ramenées à 0,32, 0,57 et 0,79, en tenant compte du terme correctif apporté par le deuxième problème.

Nos expériences sur la déformation de la surface et les dispositions de la figure 41 sont entièrement corroborées par les photographies du professeur Kourdumoff en 1889.

Voici ces expériences telles qu'elles sont décrites par Janowski :

« Son appareil consistait en une boîte remplie de sable et ayant une paroi latérale en verre épais. Un prisme en bois, mis en mouvement par une vis à manivelle pouvait plonger dans le sable en restant en contact avec le verre. Pendant la descente du prisme, on photographiait le phénomène du refoulement à travers la paroi transparente, de sorte que les particules de sable qui restaient en repos furent reproduites sur la photographie comme points, tandis que les particules mouvantes donnèrent le tracé d'une courbe. Puisque la descente du prisme se faisait dans la même verticale, le refoulement était symétrique par rapport à l'axe du prisme.

» La limite courbe entre les points qui restaient en repos et ceux qui se déplaçaient nous démontre que les prismes de poussée et de butée ont un profil continu curviligne.....

» M. Kourduhoff a répété ses essais dans les différentes positions du niveau du sable et du prisme de charge; les courbes de refoulement qu'il a obtenues ont toujours conservé le même caractère.....

» La solution complète de la question de la résistance du sol sablonneux aux pressions verticales exige la détermination analytique de la forme des courbes de glissement, de la grandeur et de la disposition des ellipses des tensions sous la base-problème qui ne saurait être résolue à présent, vu que l'intégration des équations différentielles générales d'équilibre d'un corps pulvérulent n'est pas abordable dans le cas d'une charge partielle du terrain sablonneux ».

Nous avons vu que ces équations sont intégrables si l'on scinde en deux le problème.

Il reste entendu que si le milieu de fondation était constitué par un milieu pulvérulent recouvert au-dessus du plan horizontal H par un corps cohérent, dont l'angle de frottement est toujours petit, le calcul précédent conduisant à la formule

$$p = \varpi h \frac{e^{\left(3\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi}}{1 - \sin \varphi}$$

n'est plus valable.

C'est la formule $p = \varpi h \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\varphi \tan \varphi}$ qu'il faut appliquer, ϖ étant le poids spécifique du milieu cohérent.

b. Le frottement sur les parois du piston. Nous avons en effet

constaté que, entre la fissure et le piston, le massif ne se soulève pas. C'est donc qu'il frotte sur les parois de celui-ci. La théorie de ce frottement est difficile à établir, étant donnée la nécessité d'avoir des systèmes de forces cohérents.

c. Une autre cause d'erreur est la suivante : la théorie de la formule a été établie pour un milieu à deux dimensions (un mur dans un massif indéfini par exemple). Or, notre expérience est faite avec un piston cylindrique dans une cuve cylindrique. Elle introduit donc la troisième dimension, circonstance qui augmente la résistance des fondations.

La théorie des fondations à trois dimensions reste à faire. Elle nous a paru complexe et difficile; nous ne l'avons pas abordée dans cet ouvrage.

d. Enfin, une erreur importante tient au mode opératoire qui introduit de l'hystérésis puisqu'on décomprime progressivement le plan horizontal H. La figure 16 montre que le milieu se comporte comme un milieu pulvérulent d'angle supérieur à 30°. Or la fonction $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)e^{\pi \tan \varphi}$ croît très rapidement avec φ : pour qu'il y eut concordance avec l'expérience, il suffirait que φ fut égal à 42°.

La formule que nous avons cherché à vérifier est très satisfaisante du point de vue théorique. L'esprit de la formule qui est la résistance par le refoulement latéral a été confirmé par nos expériences sur la déformation de la surface libre qui corroborent elles-mêmes les expériences de Kourdumoff en 1889.

Pour des applications à trois dimensions qui se posent le plus souvent à l'Ingénieur, nous avons trouvé que cette formule donnait un coefficient de sécurité important par rapport à l'expérience qui est elle-même assez fidèlement représentée dans le voisinage de $\varphi = 30^\circ$ par la formule de Jankowski.

Nous pensons donc que la formule

$$p = \pi h \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\pi \tan \varphi}$$

est une formule satisfaisante pour la pratique des fondations à trois dimensions.

CONCLUSION.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons étudié les phénomènes de frottement des milieux pulvérulents.

Nous avons fait une distinction essentielle entre le frottement physique ψ et le frottement apparent φ défini par la loi de Coulomb.

La loi de Coulomb se vérifie convenablement dans un large intervalle de pression (0 à 20 kg/cm²).

Le frottement apparent est donc indépendant de la pression. Il semble être indépendant de l'humidité du milieu et varier peu avec la granulométrie du milieu.

Il varie très largement (50 à 70 pour 100) par contre avec le tassement et l'enchevêtrement des grains.

Le frottement apparent n'est pas indépendant du frottement physique et, dans le cas d'un milieu enchevêtré isotrope, il lui est relié par la relation $\tan \varphi = \frac{\pi}{2} \tan \psi$.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes proposé d'exposer et de compléter une formule de fondation donnée en application d'une théorie générale.

Nous avons constaté que cette formule était encore pessimiste, bien que beaucoup plus optimiste que la plupart des formules existantes.

Cette formule qui, appliquée aux problèmes à trois dimensions, laisse une importante marge de sécurité, nous apparaît très intéressante.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 juin 1935.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 juin 1935.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.

SECONDE THÈSE.



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

L'hystérésis dans les phénomènes mécaniques

Vu et approuvé :

Paris, le 20 juin 1935.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 juin 1935.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
INTRODUCTION.....	I

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DU FROTTEMENT DANS LES MILIEUX PULVÉRULENTS.

CHAPITRE I. — Rappels et définitions. — Frottement physique.....	3
CHAPITRE II. — Dispositifs expérimentaux pour la mesure du frottement apparent dans les milieux pulvérulents.....	10
CHAPITRE III. — Résultats expérimentaux. — Sable de Nemours. Sable de Loire. — Matériaux de broyage.....	27
CHAPITRE IV. — Conclusions de l'étude sur le frottement.....	58

DEUXIÈME PARTIE.

RÉSISTANCE DES FONDATIONS EN MILIEU PULVÉRULENT.

CHAPITRE V. — État actuel de la question.....	59
CHAPITRE VI. — Théorie des fondations.....	63
CHAPITRE VII. — Résultats expérimentaux sur le sable de Nemours.....	83
CHAPITRE VIII. — Interprétation.....	94
CONCLUSION.....	101



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
102010 Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
102010 Quai des Grands-Augustins, 55.
